The book consists of three chapters, each of which contains the new, sometimes entirely unexpected results in the field of three-valued logics.

In the first chapter, the main result is the proof of the theorem concerning the necessary and sufficient conditions, which an arbitrary three-valued matrix M, must satisfy in order to be an isomorph of $\mathbf{C_2}$. It is also shown that there are three-valued isomorphs of $\mathbf{C_2}$, which contain continuum many closed subclasses.

In the second chapter, are presented the theorems concerning the continual power of the sets of the closed classes of Bochvar's three-valued logic $\mathbf{B_3}$ and Hallden's three-valued logic $\mathbf{H_3}$. Moreover, it is proved that there exist three-valued closed classes of functions, in which the number of precomplete classes is infinite.

In the closing chapter, the classification of three-valued logics based on the notion of «weakly natural implication» is proposed. It is shown that there are 10 distinct classes of functions, obtained by means of extending the weak regular Kleene's logic $\mathbf{K_3^w}$ with appropriate implications. These 10 classes are lattice ordered with respect to functional containment.

The book is introduced with the extensive foreword written by A.S. Karpenko, in which the further perspectives of research are laid out.

Russian Academy of Sciences
Institute of Philosophy

**Leonid Devyatkin, Nikolay Prelovskiy,
Natalya Tomova**

WITHIN THE LIMITS OF THREE-VALUEDNESS

Moscow
2015

Российская академия наук
Институт философии

**Л.Ю. Девяткин, Н.Н. Преловский,
Н.Е. Томова**

В ГРАНИЦАХ ТРЕХЗНАЧНОСТИ

Москва
2015

УДК 164.03+510.644
ББК 87.4
Д 25

В авторской редакции

Авторы:

А.С. Карпенко — Предисловие
Л.Ю. Девяткин — Глава 1
Н.Н. Преловский — Глава 2
Н.Е. Томова — Глава 3; Приложение

Рецензенты

доктор филос. наук *К.И. Бахтияров*
доктор филос. наук *Д.В. Зайцев*

Д 25 **Девяткин, Л.Ю.** В границах трехзначности [Текст] / Рос. акад. наук, Ин-т философии ; А.С. Карпенко (Предисловие), Л.Ю. Девяткин, Н.Н. Преловский, Н.Е. Томова. — М. : ИФ РАН, 2015. — 136 с. ; 20 см. — Библиогр.: с. 30–32, 72–74, 95–96, 125–127. — Имен. указ.: с. 131–132. — Предм. указ.: с. 133–135. — 500 экз. — ISBN 978-5-9540-0296-6.

Книга «В границах трехзначности» состоит из трех глав, каждая из которых содержит новые, порой совершенно неожиданные результаты в области трехзначных логик. Наиболее важными являются: теорема о необходимых и достаточных условиях, которыми должна обладать произвольная трехзначная матрица, чтобы быть изоморфом для классической логики высказываний; теорема о том, что могут существовать трехзначные замкнутые классы функций, в которых число предполных классов *бесконечно*; построение новой классификации расширений слабой логики Клини.

ISBN 978-5-9540-0296-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

CONTENTS

ПРЕДИСЛОВИЕ. МНОГООБРАЗИЕ ТРЕХЗНАЧНОСТИ

Вот уже почти целое столетие трехзначные логики вызывают к себе неослабевающий интерес. Оказалось, что добавление всего лишь одного дополнительного значения, промежуточного между 1 (истина) и 0 (ложь), кардинально меняют универсум, строго задаваемый классической двузначной логикой. Появляются совершенно новые и очень богатые выразительные средства, которые делают трехзначные логики такими привлекательными для различных применений и приложений[1].

Но нас будет интересовать другое, а именно, те удивительные и совершенно неожиданные феномены, порой необъяснимые, которые открывает нам трехзначный мир. Целью данного предисловия является неформальное, по возможности без использования специальной символики, введение в современную проблематику трехзначных логик с точки зрения их функциональных свойств. Поэтому логика здесь в основном предстает не в виде пропозициональных исчислений или алгебраических тождеств, а в виде функциональной системы, под которой понимается некоторое множество трехзначных функций F, замкнутое относительно операции суперпозиции. Операция суперпозиции состоит из элементарных операций над элементами множества F, например, переименование и отождествление переменных и подстановка одной функции в другую.

[1]См. о некоторых применениях раздел 3.7 в [11].

1. Изоморфы

В 1938 г. Д.А. Бочваром была построена первая в мире логика бессмысленности $\mathbf{B_3}$ [6] в связи с проблемой разрешения логических антиномий, в первую очередь парадокса Рассела.

Переменные p, q, r с индексами или без пробегают по высказываниям; переменные x, y, z с индексами или без пробегают по истинностным значениям. Мы будем использовать одинаковые символы для обозначения логических связок и соответствующих им операций в матрице.

Логика $\mathbf{B_3}$ задается матрицей $M_3^B = \langle\{0, 1/2, 1\}, \sim, \vdash, \cap, \{1\}\rangle$, где $\{1\}$ есть множество выделенных значений, и $\sim$ (внутреннее отрицание), $\vdash$ (внешнее утверждение) и $\cap$ (внутренняя конъюнкция) определяются таблицами:

x	$\sim x$
1	0
1/2	1/2
0	1

x	$\vdash x$
1	1
1/2	0
0	0

$\cap$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2
0	0	1/2	0

Через $p \cap q$ и $\sim$ p обычным образом определяются другие внутренние связки:

$$p \cup q := \sim (\sim p \cap \sim q),$$

$$p \supset q := \sim p \cup q,$$

$$p \equiv q := (p \supset q) \cap (q \supset \mathrm{p}),$$

где символ := означает «равно по определению».

Обратим внимание на яркую особенность внутренних связок, которая заключается в том, что приписывание хотя бы одному из аргументов значения 1/2 оказывается достаточным для того, чтобы вся формула имела значение 1/2. Логику с внутренними связками $(\sim, \cap, \cup)$ обозначим посредством $\mathbf{B_0}$.

Особую роль в $\mathbf{B_3}$ играет связка $\vdash$ (будем обозначать ее как $\Box$, поскольку это есть оператор необходимости в трехзначной модальной логике Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$)[2], посредством которой следующим образом определяется отрицание $\sim^{\Box}$, импликация $\supset^{\Box}$, дизъюнкция $\cup^{\Box}$, конъюнкция $\cap^{\Box}$ и внешняя эквиваленция $\equiv^{\Box}$:

$$\sim^{\Box} p := \sim \Box p,$$

$$p \supset^{\Box} q := \Box p \supset \Box q,$$

$$p \cup^{\Box} q := \Box p \cup \Box q,$$

$$p \cap^{\Box} q := \Box p \cap \Box q,$$

$$p \equiv^{\Box} q := \Box p \equiv \Box q.$$

Эти связки Д.А. Бочвар называет *внешними* и они задаются следующими таблицами:

x	$\sim^{\Box} x$
1	0
1/2	1
0	1

$\supset^{\Box}$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	1	1	1
0	1	1	1

$\cup^{\Box}$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	0	0
0	1	0	0

$\cap^{\Box}$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	0	0	0
0	0	0	0

$\equiv^{\Box}$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	0	1	1
0	0	1	1

Выделенным значением здесь является 1.

Отметим важную особенность приведенных истинностных таблиц, которая состоит в том, что областью значения являются только классические истинностные значения 1 и 0. По суще-

[2]Трехзначная логика Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$ как раз является примером расширения выразительных возможностей, позволяющих введение модальных операторов (см. раздел 3.1.2 в [11]).

ству, Бочвар предложил *перевод* внутренних связок во внешние. Обозначим логику, основанную на этих связках, посредством $\mathbf{B_3^\Box}$.

Под *фрагментом* некоторой логики $\mathbf{L}$ с множеством связок F будем понимать логику $\mathbf{L}'$ с множеством связок F' такую, что посредством F определимы связки из множества F', но не наоборот. Отсюда следует, что $\mathbf{B_3^\Box}$ есть фрагмент логики $\mathbf{B_3}$. Этот фрагмент оказался необычным. Адаптируя терминологию Д.А. Бочвара назовем $\mathbf{B_3^\Box}$ *изоморфом* классической пропозициональной логики $\mathbf{C_2}$. Последнее означает, что по классу тавтологий и по классу выводимых формул логика $\mathbf{B_3^\Box}$ совпадает с классической пропозициональной логикой $\mathbf{C_2}$. Таким образом, логика $\mathbf{B_3}$ содержит фрагмент, изоморфный $\mathbf{C_2}$.

В итоге, логика $\mathbf{B_3}$ имеет два уровня. Первый уровень образуют формулы с внутренними связками, второй уровень образуют формулы с внешними связками $\mathbf{B_3^\Box}$. Внутренние формулы суть выразительные средства и представляют язык-объект, в котором рассматриваемые факты не могут быть доказаны; внешние формулы суть дедуктивные средства, с помощью которых доказываются утверждения о внутренних формулах, и в этом смысле внешние формулы представляют метаязык. Логикой внешнего уровня, как мы видим, является классическая логика $\mathbf{C_2}$. Как раз заслугой Бочвара является то, что средствами трехзначной логики, даже такой слабой по функциональным свойствам как $\mathbf{B_3}$, можно определить два совершенно различных уровня логических связок. Это было выдающееся открытие, не сразу получившее адекватного осмысления.

Н. Решер, наверное, был одним из первых, кто обратил внимание на $\mathbf{B_3}$ и на выделенный в ней Д.А. Бочваром фрагмент, являющийся изоморфом $\mathbf{C_2}$ [39, p. 31]. Однако в [9, с. 25–26] было указано, что $\mathbf{B_3}$ имеет еще один изоморф $\mathbf{C_2}$. Как уже говорилось, связка $\vdash p$ есть $\Box p$, и тогда имеем также модальный оператор возможности $\Diamond p$, который определяется стандартным образом в виде $\Diamond p := \sim\Box\sim p$. Теперь мы можем определить *внешние* связки $\sim^{\Diamond}, \supset^{\Diamond}, \cup^{\Diamond}, \cap^{\Diamond}$ и $\equiv^{\Diamond}$ аналогично тому, как определялись внешние связки в $\mathbf{B_3^{\Box}}$, т.е. вместо оператора $\Box$ перед каждой пропозициональной переменной ставится оператор $\Diamond$. Обозначим логику, основанную на этих связках, посредством $\mathbf{B_3^{\Diamond}}$. Выделенными значениями здесь являются 1 и $^1\!/_2$.

В результате мы получили еще один трехзначный изоморф $\mathbf{C_2}$. Таким образом, трехзначная логика Бочвара $\mathbf{B_3}$ имеет два изоморфа классической двузначной логики $\mathbf{C_2}$. Обратим внимание, что изоморфы $\mathbf{B_3^{\Box}}$ и $\mathbf{B_3^{\Diamond}}$ отличаются друг от друга соответственно тем, что в $\mathbf{B_3^{\Box}}$ истинностное значение $^1\!/_2$ отождествляется с 0, а в $\mathbf{B_3^{\Diamond}}$ с 1. При таком отождествлении свойства связок остаются классическими, что в явном виде указывает на то, что верифицируются все аксиомы $\mathbf{C_2}$. Легко проверить, что здесь также верифицируется «строгий» *modus ponens*, т.е. это правило сохраняет выделенное значение. Такие изоморфы назовем «строгими изоморфами».

В 2000 г. В.Е. Комендантским был сделан первый шаг в систематическом изучении изоморфов [14]. Посредством компьютерной программы им было получено 65 изоморфов, являющихся фрагментами трехзначной логики Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$. Из них два изоморфа с одним выделенным значением и шестнадцать с двумя выделенными значениями, верифицирующих строгий *modus ponens*. Оставшиеся изоморфы не являются строгими. Первая специальная работа, посвященная изоморфам, принадлежит Л.Ю. Девяткину [4], в которой исследовались свойства строгих изоморфов.

Новый поворот в изучении изоморфов был совершен в [4]. Автором данного предисловия было обращено внимание на то, что имеется еще два изоморфа, если мы рассмотрим $\mathbf{B_3^{\Box}}$ с двумя выделенными значениями, а $\mathbf{B_3^{\Diamond}}$ с одним выделенным значением. Отличие от предыдущих изоморфов в том, что здесь верифицируется лишь «слабый» *modus ponens*, т.е. это правило сохраняет тавтологию, но не выделенное значение. Однако в данном случае, как в случае с классической логикой $\mathbf{C_2}$, это различие не имеет никаких логических последствий в силу следующего результата из [4]: матрицы

$$M_3^{\Box,1} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \sim^{\Box}, \supset^{\Box}, \{1\}\rangle,$$

$$M_3^{\Diamond,2} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \sim^{\Diamond}, \supset^{\Diamond}, \{1/2, 1\}\rangle,$$

$$M_3^{\Box,2} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \sim^{\Box}, \supset^{\Box}, \{1\}\rangle \text{ и}$$

$$M_3^{\Diamond,1} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \sim^{\Diamond}, \supset^{\Diamond}, \{1/2, 1\}\rangle$$

являются характеристическими[3] для $\mathbf{C_2}$. Тем не менее, как мы увидим в третьем разделе данной книги, средства трехзначной логики позволяют различать эти два вида правила *modus ponens*. Здесь обратим внимание на одно важное замечание, сделанное Н. Решером и А. Чёрчем в [28], что, хотя трехзначная матрица M_3 может быть характеристической для $\mathbf{C_2}$, но никакая булева алгебра не является гомоморфной M_3.

Специальному изучению вообще трехзначных изоморфов $\mathbf{C_2}$ посвящена книга Л.Ю. Девяткина [5]. В ней сохраняется импликативно-негативный пропозициональный язык, но исследование изоморфов теперь ведется относительно свойств отношения логического следования. Другим важным нововведением было расширение поля поиска изоморфов. В книге снимается ограничение на то, что матрица является $\boldsymbol{C}$-расширяющей. Свойство $\boldsymbol{C}$-расширяемости состоит в том, что ограничение импликации и отрицания на подмножество $\{0, 1\}$ множества $\{0, 1/2, 1\}$ есть обычные классические связки импликации и отрицания.

[3]Матрица M называется *характеристической* для исчисления $\mathbf{L}$, если формула A является тавтологией в M т.т.т., когда A доказуема в $\mathbf{L}$.

Таким образом, мы видим, что классическая пропозициональная логика может моделироваться по-разному. Но здесь проявляется одно неожиданное свойство изоморфов. Оказалось, что изоморфы $\mathbf{C_2}$ различаются по своим функциональным свойствам. Это означает, что их можно решеточно упорядочить посредством отношения функциональной вложимости одного изоморфа в другой. В [6] обсуждается такая восьмиэлементная решетка, которая представляет собой «склейку» двух булевых четырех-элементных решеток. Свойство «булевости» здесь не случайно, это как раз говорит о неких глубоко скрытых внутренних свойствах самой классической логики.

Существенный прорыв в изучении трехзначных изоморфов $\mathbf{C_2}$ уже на более фундаментальном уровне совершен Л.Ю. Девяткиным в этой книге. Главным результатом является доказательство Теоремы 1 о необходимых и достаточных условиях, которыми должна обладать произвольная трехзначная матрица M, чтобы быть изоморфом для $\mathbf{C_2}$:

Трехзначная матрица M является матрицей для $\mathbf{C_2}$, если и только если существует матричный гомоморфизм из M на $\mathbf{C_2}$ (определение матричного гомоморфизма см. на с. 49).

К тому же, что очень важно, указанная теорема имеет место для произвольного пропозиционального языка $\mathcal{L}$. Таким образом, понятие изоморфа впервые обретает строгие логико-алгебраические основания.

Особый интерес представляют последние два раздела главы 1, где Л.Ю. Девяткин возвращается к интереснейшей теме о функциональных свойствах изоморфов. Опираясь на классический результат С.В. Яблонского [24], описавшего все 18 классов функций, предполных в P_3 (определение предполноты см. ниже), где P_3 есть функционально полный класс функций, соответствующий трехзначной логике Поста $\mathbf{P_3}$ [36], автор обращает внимание на три предполных класса функций типа U, сохраняющих нетривиальные отношения эквивалентности. В этих классах выделяются подклассы классических функций, $U_0, U_{1/2}, U_1$, т.е. таких функций, на основе которых могут быть построены трехзначные матрицы с классическим отношением следования. Другими словами, трехзначные функции являются классическими, если они задают построение изоморфа $\mathbf{C_2}$. Поскольку указанные подклассы не являются *собственными*, то в силу результата С.С. Марченкова о континуальной мощности числа замкнутых классов во всех предполных классах P_k ($k \geq 3$), кроме класса линейных функций [19], следует совершенно неожиданное открытие: имеются трехзначные изоморфы $\mathbf{C_2}$, которые по мощности множеств своих замкнутых классов *континуальны*! Что это означает, пока не понятно. А все дело в том, что мощность множества замкнутых классов P_2 счетна. Так мы подошли к теме счетности и континуальности в трехзначных логиках.

2. Континуальность

В 1921 г. Э. Пост установил [36], что мощность множества замкнутых классов в P_2 *счётна*, где P_2 — множество функций, соответствующее $\mathbf{C_2}$ (определение функции k-значной логики, суперпозиции, замкнутого класса, базиса, функциональной полноты и предполноты см. в главе 2). Отметим только, что класс функций $Ł_3$, соответствующей трехзначной логике Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$, (определение связок $\mathbf{Ł_3}$ можно найти на с. 117) предполон в P_3, т.е. добавление к $Ł_3$ функции, не содержащейся в ней, но принадлежащей P_3, превращает $Ł_3$ в P_3. В свою очередь, класс функций G_3, соответствующей трехзначной логике Гейтинга $\mathbf{G_3}$ (об этой логике см. раздел 3.2 в [11]), которая нам в дальнейшем понадобится, предполон в $Ł_3$. Это также означает, что посредством исходных функций $Ł_3$ выразимы функции G_3, но не наоборот. В этом случае говорят, что G_3 функционально вложима в $Ł_3$. Что касается класса функций B_3, соответствующего трехзначной логике Бочвара $\mathbf{B_3}$, то он даже не является предполным в $Ł_3$, а гораздо «слабее». Теперь перейдем к главному.

В книге Э. Поста [37], где дается полное описание решетки замкнутых классов P_2, каждый класс строится эффективно, и показано, что каждый замкнутый класс имеет конечный базис, также был поставлен вопрос об описании всех замкнутых классов в P_k. На положительное решение вопроса дал некоторые основания сам Пост, предположив что для исследования функций многозначной логики можно воспользоваться методом моделирования таких функций в двоичной системе и получить результаты, подобные результатам для булевых функций (см. раздел 10.6 в [11]). Этого придерживался и С.В. Яблонский. Однако на самом деле, с многозначной логикой, начиная уже с трехзначного уровня, дело обстоит совсем по-другому. Стало очевидным, что имеются существенные различия между классической двузначной логикой и трехзначной логикой, говорящие о *принципиальной несводимости второй к первой.*

И полной неожиданность для всех специалистов стал следующий результат Ю.И. Янова и А.А. Мучника: *для всякого k ($k \geq 3$) P_3 содержит* ***континуум*** *различных замкнутых классов* [26].

Таким образом, добавление только одного истинностного значения к классической двузначной логике приводит к континуальной мощности замкнутых классов. Собственно говоря, точная природа такого различия между двузначной и трехзначной логиками неясна, т.е. при переходе от двух истинностных значений к трем озадачивает происходящий *скачок* от счетности к континуальности.

Обратим внимание на то, что этот примечательный результат относится только к функционально полным логикам. А как быть с другими логиками, например, с $Ł_3$, не говоря уже о других функционально более слабых логиках? В 1969 г.

М.Ф. Раца [20] установил, что мощность множества замкнутых классов в G_3 является континуальной, а поскольку G_3 функционально предполно в $Ł_3$, то $Ł_3$ также континуальна в указанном выше смысле. А как обстоит дело с числом замкнутых классов в B_3?

Много лет назад В.К. Финном в разговоре с автором этого предисловия была выдвинута гипотеза, что мощность множества замкнутых классов B_3 является счетной, как и для P_2. Эта гипотеза выглядела вполне естественной и основывалась на отделимости внутренних функций, порождаемых функциями $\sim$, $\cap$ (класс B_0), от класса внешних функций, областью значения которых является множество $\{0, 1\}$ (таковы, например, бочваровы изоморфы). Поскольку каждый из этих классов сам по себе счетен, то в объединении они порождают счетное множество функций B_3.

Однако была высказана и другая гипотез. В 1986 г. Д. Лау (см. [35, p. 221]) обосновала следующий критерий счетности:

Пусть F есть подкласс P_k (или алгебра со счётным множеством элементов). Там существует отношение частичного порядка $\leq$ на F, удовлетворяющее следующим трем свойствам:

(a) $f \leq g \Rightarrow [f] \subseteq [g]$,

(b) *каждая цепь является вполне упорядоченной*[4] *(относительно $\leq$)*,

(c) *каждая антицепь*[5] *(относительно $\leq$) имеет только конечное число элементов.*

---

[4]Т.е. каждое непустое подмножество обладает единственным минимальным элементом

[5]*Антицепью* называется подмножество частично упорядоченного множества, состоящее из попарно несравнимых элементов, которых не меньше двух.

Тогда F имеет как наибольшее только счётное множество различных подклассов.

В [12] было показано, что условие (a) в B_3 не выполняется. Это явилось основанием для утверждения о том, что мощность множества замкнутых классов B_3 является континуальной.

Новый этап в изучении функциональных свойств B_3 начался с работы Н.Н. Преловского [38]. Было указано, в чем ошибочность гипотезы В.К. Финна и установлено, что результат из [12] дает лишь необходимое, но не достаточное условие для того, чтобы класс B_3 содержал континуальное множество замкнутых классов. В итоге, модифицировав доказательство из [26], Н.Н. Преловский доказал теорему о континуальности B_3. Более того, доказана континуальность одного из предполных классов B_3, а именно, класса функций H_3, соответствующего трехзначной логике бессмысленности Холдена $\mathbf{H_3}$. А это значит, что все замкнутые классы функций, которые содержат H_3, являются континуальными.

В данной книге (глава 2) представлено несколько дополненное доказательство результатов из [38] и, кроме этого, обсуждается вопрос о мощности множества самих предполных классов в некотором трехзначном замкнутом классе функций.

А.В. Кузнецов показал, что *для любого k существует лишь конечное число предполных классов M_1, M_2, $\ldots M_q$* в функционально полной логике [17, 18]. Важная роль предполных классов функций видна из следующей теоремы А.В. Кузнецова, которая формулирует критерий функциональной полноты для P_k, где P_k есть множество всех k-значных функций:

Система функций F полна в P_k тогда и только тогда, когда она не содержится целиком ни в одном предполном классе M_i (см. также [24]).

Таким образом, опираясь на теорему Кузнецова и на тот факт, что число предполных классов конечно, можно в принцине решить проблему функциональной полноты для P_k[6]. Свойство функциональной полноты является чрезвычайно важным и необходимо, например, для того, чтобы можно было реализовать любую переключательную схему.

Конечно, в некоторых логиках число предполных классов бесконечно. Такими являются счетнозначные логики $P_{\aleph_0}$, для которых установлена гиперконтинуальность множества предполных классов [25]. В счетнозначных логиках особую роль играют различные их подклассы, например такие, как *предельные логики*. Предельные логики представляют собой счетные замкнутые классы функций из $P_{\aleph_0}$, содержащие гомоморфные прообразы всех конечнозначных функций. Мощность множества предполных классов в предельных логиках может быть равна любому натуральному числу, а также быть счетной или континуальной (см. [7]).

Все больший интерес в последнее время вызывает множество всех ограниченно-детерминированных функций (автоматных отображений), входные и выходные переменные которых определены на множестве бесконечных последовательностей, составленных из E_k, где $E_k = \{0, \ldots, k-1\}$. Такое множество обозначается посредством P^k. В.Б. Кудрявцев показал, что мощность множества предполных классов в P^k равна континууму [15]. Тем самым получен отрицательный ответ на вопрос о существовании эффективного критерия полноты в терминах предполных классов. В [16] также установлена алгоритмическая неразрешимость задачи о полноте для P^k.

Я привел эти результаты о мощности предполных классов для того, чтобы оттенить гипотезу Н.Н. Преловского, выдвинутую им несколько лет назад о том, что могут существовать трехзначные замкнутые классы функций, в которых число предполных классов *бесконечно*. Это по меньшей мере вы-

[6]Описание всех предполных класов в k-значной логике ($k \geq 3$) дано И. Розенбергом [40].

глядит очень странно. Тем не менее, Теорема 8 во второй главе именно об этом. Также доказано, что имеются замкнутые классы с пустым множеством предполных классов. В таком контексте вопрос о континуальном множестве предполных классов остается открытым.

Рассмотрим следующее полезное понятие, впервые введенное в [20]. Будем называть *глубиной* системы F функций в классе K_0 наименьшее из таких натуральных чисел m, что существует убывающая последовательность классов $K_0, K_1, \ldots, K_m$, удовлетворяющая двум условиям:

1) класс K_{i+1} предполон в K_i $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$;
2) система F является полной в K_m.

В частности, то, что глубина системы F в классе K_0 равна 0, означает, что F является полной в K_0.

И. Розенберг вводит понятие *субмаксимального (subtaximal)* класса (клона) в [41]. Это такие предполные классы функций, глубина которых равна 2. Как раз первым примером классов функций «глубины 2», был класс G_3, соответствующей трехзначной логики Гейтинга $\mathbf{G_3}$. Естественно возникает вопрос об описании всех субмаксимальных классов в P_3. На этот вопрос дает ответ следующая примечательная теорема (см. раздел 14.10 в [35]):

Всего P_3 имеет 158 субмаксимальных клонов. Из них: 5 субмаксимальных клонов имеют конечное множество замкнутых классов; 7 субмаксимальных клонов имеют счетное множество классов; остальные 146 субмаксимальных клонов имеют мощность континуума.

Таким образом, описаны предполные классы функций глубиной 2. Из этого описания следует, что в каждом из 18 предполных классов P_3 число своих предполных классов конечно. Теперь мы можем перейти к предполным классам функций, глубина которых 3, и т.д. Заметим, что глубина предполного класса функций B_3 есть 4. Так мы можем дойти до пустого класса, не содержащего никаких функций. Из теоремы Н.Н. Преловского следует, что где-то в решетке замкнутых классов P_3 существует класс с бесконечным множеством предполных классов. Все результаты второй главы говорят о необычайной сложности функциональных свойств слабых (не функционально полных) трехзначных логик. Поэтому представляется значимой какая-то хорошо обоснованная классификация наиболее интересных слабых трехзначных логик.

3. Классификация

Многие специалисты пытались как-то упорядочить мир трехзначных логик (см., например, [23], [31], [27], [29]), но все упиралось в выбор *основания* классификации и в дальнейшие принципы применения этого основания. Наиболее перспективный подход в этом направлении принадлежит Н.Е. Томовой (см. [21, 42]), которая в качестве основания классификации берет логику внутренних связок Бочвара, т.е. $\mathbf{B_0}$ (см. выше) или, что то же самое, логику слабых связок Клини $\mathbf{K_3^w}$ [34] открытую одновременно с $\mathbf{B_0}$. Специфика этой логики такова, что при одном выделенном значении ее класс тавтологий пуст, а при двух выделенных значениях $\mathbf{B_0}$ по классу тавтологий совпадает с $\mathbf{C_2}$. Вот в этом промежутке между пустым и полным множеством тавтологий и происходят основные события.

Основополагающая идея состоит в том, что теперь мы последовательно расширяем $\mathbf{B_0}$ классом импликаций, но не любыми импликациями, а *естественными.* Определение естественной импликации выглядит следующим образом.

Пусть V_3 есть $\{0, {}^1\!/_2, 1\}$ и D есть множество выделенных значений. Импликацию $\to$ будем называть *естественной*, если она обладает следующими свойствами:

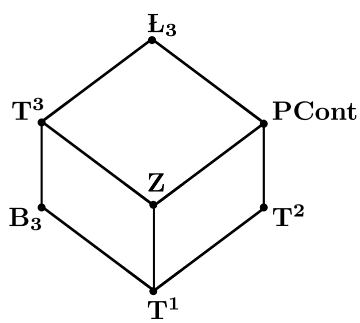
(1) ***C**-расширение* (см. выше).

(2) *Верификация сильного правила modus ponens, т.е. если $x \to y \in D$ и $x \in D$, то $y \in D$.*

(3) *Согласованность с частичным порядком на V_3: если $x \leq y$, то $x \to y \in D$.*

(4) *$x \to y \in V_3$, в остальных случаях.*

В результате имеем 28 различных таблиц для импликаций, удовлетворяющих условиям (1)–(4). Множество трехзначных матриц, которые являются расширением $\mathbf{B_0}$ естественными импликациями, разбивается на семь непересекающихся классов. Эти семь классов представимы в виде решетки семи *базовых* (при данном подходе) трехзначных логик по отношению функционального вложения одной логики в другую:



Заметим, что доказательство функциональной вложимости (не вложимости) в отдельных случаях представляет собой нетривиальную задачу (об этом мы еще скажем ниже). Укажем только, что в итоге имеем здесь 12 базисов для трехзначной логики Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$, 8 базисов для паранепротиворечивой логики **PCont** и 3 базиса для логики Бочвара $\mathbf{B_3}$.

Для того, чтобы показать, что понятие естественной импликации требует обобщения, которое должно привести к расширению класса естественных логик, обратим внимание на три импликации из базисов для $\mathbf{B_3}$. Две нам уже известны — это импликации $\supset^{\Box}$ и $\supset^{\Diamond}$, и к ним добавляется еще импликация $\to_4$ (определение на с. 127). Но оказалось, что при построении четырехэлементной решетки простых паралогик (особый класс паранепротиворечивых и параполных логик), в которой задействованы указанные три импликации, не хватает еще одной очень важной импликации (см. [33]).

Однако мы найдем нужную импликацию, если ослабим условие (2) и позволим матрице верифицировать правило слабого *modus ponens*, состоящего в сохранении тавтологии. Впервые на то, что многозначные логики позволяют различать два вида правила *modus ponens*, обратил внимание Н. Решер [39, p. 70–72]. В третьей главе книги, написанной Н.Е. Томовой, дается их строгая формулировка и доказательство того, что уже на трехзначном уровне различие между ними принципиально.

Сняв ограничение на то, что *modus ponens* является строгим, т.е. сохраняющим выделенное значение, появляется возможность определить класс, так называемых, «слабо» естественных импликаций и рассмотреть расширенный класс логических матриц, что и было сделано в указанной главе. В результате появляется еще 13 различных таблиц для импликаций (и среди них новая бочварова импликация $\to_{29}$, которой не хватало при построении четырехэлементной решетки паралогик: $1 \to_{29} 0 = 0$, в остальных случаях $x \to_{29} y = 1$).

Сама решетка классов естественных логик теперь обогатилась на три новых элемента. Первый класс представлен слабой регулярной логикой Клини $\mathbf{K_3^w}$ ($\mathbf{B_0}$), второй класс — двумя промежуточными регулярными логиками Клини $\mathbf{K_3^{\rightarrow}}$ и $\mathbf{K_3^{\leftarrow}}$, которые дуальны, и третий класс представлен сильной регулярной логикой Клини $\mathbf{K_3}$. На эти логики стоит обратить внимание, поскольку мы возвращаемся к тому, с чего начали — с рассмотрения изоморфов $\mathbf{C_2}$. Указанные три логики появляются в решетке классов естественных логик с двумя выделенными значениями. А это значит, что они являются изоморфами $\mathbf{C_2}$ со слабым правилом *modus ponens*. Что касается $\mathbf{K_3}$ со связками $(\sim, \vee, \wedge)$, где $x \vee y = max(x, y)$ и $x \wedge y = min(x, y)$, то уже Н. Решер в [39, p. 116–117] подчеркнул, что матрица для нее с двумя выделенными значениями является характеристической. Строгое доказательство этого утверждения можно найти в [30, p. 252]. Здесь же отмечается, что $\mathbf{K_3^w}$ обладает аналогичным свойством. Доказательство того, что матрицы для этих четырех логик (в пропозициональном языке с отрицанием и импликацией) с двумя выделенными значениями являются характеристическими, можно найти в книге Л.Ю. Девяткина [5, раздел 3.2].

Итог классификации трехзначных логик, предложенный Н.Е. Томовой следующий. С функциональной точки зрения мы имеем 10 различных классов функций, каждый из которых получается посредством расширения B_0 соответствующими импликациями, при этом B_0 является своим собственным расширением. Среди этих классов появляются три впервые обнаруженных: T_1, T_2, T_3, которые характерны тем, что посредством стандартного определения конъюнкции и дизъюнкции через отрицание и импликацию приводят к некоммутативным связкам. Последнее время заметен интерес к некоммутативным логикам. Таковыми как раз и являются промежуточные регулярные логики Клини, которые впервые изучались Е.Ю. Комендантской в [13]. Теперь же эти логики получают статус необходимого элемента при построении решетки расширений B_0.

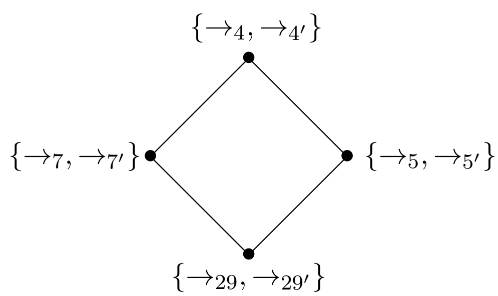
Ценность решеточного представления классов логик в том, что теперь хорошо видны различные взаимоотношения между ними. Например, логика Бочвара $\mathbf{B_3}$ имеет напарника $\mathbf{T^2}$ и эти два элемента решетки несравнимы. С другой стороны, $\mathbf{B_3}$ функционально вложима в $\mathbf{T^3}$, а $\mathbf{T^3}$, в свою очередь, в $\mathbf{Ł_3}$. Также полезность решеточного представления логик в том, что теперь можно делать различные предположения о функциональных свойствах элементов решетки. Одно из них то, что классы функций, соответствующие логикам $\mathbf{T^3}$ и **PCont**, предполны в P_3.

Еще раз обратим внимание на то, что элементами решетки являются классы логик, и каждый такой класс представляет интерес сам по себе. Интересен класс, соответствующей трехзначной логике Лукаевича **Ł$_3$**. Известно, что таблица для исходной импликации в **Ł$_3$** (1920 г.) не верифицирует закон $(p \to (p \to q)) \to (p \to q)$. Но хотелось бы иметь такую переформулировку **Ł$_3$**, чтобы имела место стандартная теорема дедукции или чтобы полностью верифицировался импликативный фрагмент $\mathbf{C_2}$[7]. Все эти импликации находятся в классе, представленном **Ł$_3$**, а сам этот класс в расширенной классификации содержит 16 различных импликаций. Отметим также, что три класса логик в этой решетке являются уникальными, они представлены соответствующими логиками в единственном числе: это минимальная регулярная логика Клини $\mathbf{K_3^w}$ ($\mathbf{B_0}$), максимальная регулярная логика Клини $\mathbf{K_3}$ и открытая Н.Е. Томовой логика $\mathbf{T^2}$. Интересно было бы выяснить, в чем состоит уникальность $\mathbf{T^2}$?

Наконец, в предложенной классификации обращает на себя внимание странный феномен, который заключается в том, что в семи случаях мы имеем импликации, которые удовлетворяют указанным требованиям как при $D = \{1\}$, так и при $D = \{1/2, 1\}$, т.е. каждая такая импликация имеет своего напарника. В классе трехзначных логик, представляющих по функциональным свойствам **Ł**$_3$, это импликация $\to_1$ и еще две подобные импликации. Интерес представляют остальные четыре случая, связанные с логикой Бочвара $\mathbf{B_3}$. Рассмотрим полный класс импликаций, соответствующих $\mathbf{B_3}$. Их всего во-

[7]О различении логик одного класса по классу тавтологий см. в статье Н.Е. Томовой [43].

семь: четыре различных импликации $\to_4$, $\to_5$, $\to_7$, $\to_{29}$ и четыре их напарника со штрихом $\to_{4'}, \to_{5'}, \to_{7'}, \to_{29'}$. На с. 124 Н.Е. Томовой приведена таблица свойств этих восьми импликаций. На самом деле, эта таблица представляет собой разбиение указанных импликаций на четыре класса, в каждом из которых одна из импликаций со своим напарником. Теперь мы можем эти классы решеточно упорядочить относительно свойства modus ponens *строгий*/*слабый* и числа выделенных значений $\{1\}/\{1, 1/2\}$. При этом учитывается, что всякая строгая естественная импликация является также слабой естественной импликацией. В результате получаем следующую четырехэлементную булеву решетку:



Здесь в качестве нуля решетки выступает класс *слабых* бочваровых импликаций независимо от выбора D. Затем этот класс, с одной стороны, расширяется свойством быть строгой бочваровой импликацией на $D = \{1, 1/2\}$, а с другой стороны, свойством быть строгой бочваровой импликацией на $D = \{1\}$. Единицей решетки выступает класс *строгих* бочваровых импликаций независимо от выбора D.

Не очень понятно, что все это означает (наличие напарника), но в каких-то приложениях, очевидно, играет определенную роль. В итоге, можно сделать вывод, что рассмотренная нами классификация трехзначных логик несет в себе огромную эвристическую силу и скрывает еще много неожиданного и интересного. Связано это с тем, что при построении решетки классов естественных логик, решена непростая задача о выразимости функций посредством операции суперпозиции через функции определенной системы. А все дело в том, что в работе Н.Р. Емельянова [8] показано, что в k-значной логике для любого фиксированного $k > 2$ эта задача является NP трудной задачей, т.е. для её решения не существует полиномиальных алгоритмов. Кстати, это является еще одним подтверждением существенного отличия трехзначной логики от классической. Именно решение Н.Е. Томовой упомянутой задачи для случая трехзначных естественных логик и делает классификацию этих логик такой привлекательной и многообещающей.

Конечно, нет единого основания для абсолютно всех трехзначных логик, поскольку каждая классификация накладывает определенные границы на область исследуемого. Например, в данную классификацию не входит упоминаемая мною выше трехзначная логика Холдена $\mathbf{H_3}$, для которой Н.Н. Преловским доказана континуальность числа замкнутых классов. Хотя $\mathbf{H_3}$ и является функциональным расширением $\mathbf{B_0}$, но для этого расширения нет подходящей естественной импликации. $\mathbf{H_3}$ появляется, если $\mathbf{B_0}$ расширим одним из унарных J-операторов, а именно $J_{1/2}$-оператором (определение J-операторов см. на с. 81). Заметим, что если $\mathbf{B_0}$ дополнительно расширим также J_0 или J_1-оператором, то получим $\mathbf{B_3}$. Классификация, основанная на расширении $\mathbf{B_0}$ J-операторами слишком ограничена, чтобы ее можно было воспринять всерьез.

Сложнее обстоит дело с трехзначной логикой Гейтинга $\mathbf{G_3}$, поскольку она не является функциональным расширением $\mathbf{B_0}$. Более того, посредством ее связок вообще не выразима ни одна связка $\mathbf{B_0}$. В этом случае нужно искать новое основание для классификации и таким основанием могут стать p-логики, введенные в [10], по аналогии с p-алгебрами и дважды p-алгебрами. Развитие этого подхода представлено Н.Е. Томовой в [22]. Здесь появляется $\mathbf{G_3}$, но в целом классификация носит также ограниченный характер, а решетки расширений p-логик мало интересны.

4. Заключение

Обозначим три области исследования, в соответствии с тремя главами данной книги, которые представляют наибольший интерес.

(**I**) Роль изоморфов $\mathbf{C_2}$ еще полностью не изучена. По крайней мере показано, что комбинация бочваровых изоморфов ведет к построению простых паралогик [32]. По всей видимости, самое интересное заключается в том, что некоторая конечнозначная логика $\mathbf{L_k}$, содержащая изоморф $\mathbf{C_2}$, может быть аксиоматизирована как расширение $\mathbf{C_2}$. В [5] разработан общий эффективный метод построения гильбертовских исчислений $\mathbf{L_k}$, являющихся расширением $\mathbf{C_2}$. Из этого метода можно извлечь, что наличие изоморфа является достаточным основанием для аксиоматизации в указанном виде широкого класса конечнозначных логик (см. [11, с. 176]).

(**II**) Выше был рассмотрен критерий счетности множества замкнутых классов функций. Однако ввиду обнаружения континуальных свойств даже в весьма слабых (функционально) трехзначных логиках, например, в таких, как логика Холдена $\mathbf{H_3}$, возникает следующая фундаментальная задача: определить достаточные и необходимые условия для континуальности множества замкнутых классов функций или показать, что критерия континуальности не существует.

(**III**) Условия, налагаемые на свойство быть естественной импликацией, можно обобщить в весьма плодотворном направлении: не требовать, чтобы импликация $\rightarrow$ была **C**-расширяющей. Это сразу же ведет к появление большого количества новых классов логик и к решетке этих классов, где супремумом является класс, состоящий из логик, функционально эквивалентных трехзначной логике Поста $\mathbf{P_3}$. Напомним, что эта логика является функционально полной. На этом пути нас ожидают новые открытия и впечатляющие результаты.

Литература

[1] *Аншаков О.М., Рычков С.В.* Об одном способе формализации и классификации многозначных логик // Семиотика и информатика. 1984. Вып. 23. С. 78–106.

[2] *Бочвар Д.А.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. 1938. Т. 4 (2). С. 287–308. (Переиздано: Многозначные логики и их применения. Т. 1: Логические исчисления, алгебры и функциональные свойства / Под ред. В.К. Финна. М.: ЛКИ, 2008. С. 25–46).

[3] *Девяткин Л.Ю.* Трехзначные изоморфы классической логики // Логические исследования. 2004. Вып. 11. С. 119–125.

[4] *Девяткин Л.Ю., Карпенко А.С., Попов В.М.* Трехзначные характеристические матрицы классической пропозициональной логики // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XVIII. М.: ИФРАН, 2007. С. 50–62.

[5] *Девяткин Л.Ю.* Трехзначные семантики для классической логики высказываний. М.: ИФРАН, 2011. 109 с.

[6] *Девяткин Л.Ю.* О некоторых функциональных свойствах трехзначных матриц для классической логики // Логические исследования. 2011. Вып. 17. С. 109–120.

[7] *Деметрович Я.* О некоторых гомоморфизмах и отношениях для предельных логик // Проблемы кибернетики. 1975. Вып. 30. С. 5–42.

[8] *Емельянов Н.Р.* О сложности задачи выразимости в многозначных логиках // ДАН СССР. 1985. Т. 282 (3). С. 525–529.

[9] *Карпенко А.С.* Многозначные логики. Серия «Логика и компьютер». Вып. 4. М.: Наука, 1997. 223 с.

[10] *Карпенко А.С.* P-логики // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. (Материалы X Общероссийской научной конференции, 26–28 июня 2008 г., Санкт-Петербург). СПб., 2008. С. 278–280.

[11] *Карпенко А.С.* Развитие многозначной логики. М.: ЛКИ, 2010. 448 с.

[12] *Карпенко А.С.* Континуальность трехзначных логик: Проблемы и гипотезы // Логические исследования. 2010. Вып. 16. С. 127–133.

[13] *Комендантская Е.Ю.* Функциональная взаимовыразимость регулярных логик Клини // Логические исследования. 2009. Вып. 15. С. 116–128.

[14] *Комендантский В.Е.* Алгоритм поиска трехзначных изоморфов классической логики // Logical Studies. 2000. No. 4. URL: `http://www.logic.ru/Russian/LogStud/04/No4-03.html`.

[15] *Кудрявцев В.Б.* О мощностях множеств предполных классов некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // ДАН СССР. 1963. Т. 151 (3). С. 493–496.

[16] *Кудрявцев В.Б., Алёшин С.В., Подколзин А.С.* Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985. 318 с.

[17] *Кузнецов А.В.* О проблемах тождества и функциональной полноты для алгебраических систем // Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР. 1956. С. 145–146.

[18] *Кузнецов А.В.* Алгебра логики и её обобщения // Математика в СССР за 40 лет (1917–1957). Т. 1. М.: Физматгиз, 1959. С. 102–115.

[19] *Марченков С.С.* О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики // Проблемы кибернетики. 1979. Вып 36. С. 5–22.

[20] *Рацa М.Ф.* О классе функций трехзначной логики, соответствующем первой матрице Яськовского // Проблемы кибернетики. 1969. Вып. 21. С. 185–214.

[21] *Томова Н.Е.* Естественные p-логики // Логические исследования. 2011. Вып. 17. С. 256–268.

[22] *Томова Н.Е.* Естественные трехзначные логики: Функциональные свойства и отношения. М.: ИФРАН, 2012. 89 с.

[23] *Финн В.К., Аншаков О.М., Григолия Р., Забежайло М.И.* Многозначные логики как фрагменты формализованной семантики // Семиотика и информатика. 1980. Вып. 15. С. 27–60.

[24] *Яблонский С.В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды математического института им. В. А. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.

[25] *Яблонский С.В.* О некоторых свойствах счетно замкнутых классов из $P_{\aleph_0}$ // ДАН СССР. 1959. Т. 124 (5).

[26] *Янов Ю.И., Мучник А.А.* ЛО существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // ДАН СССР. 1959. Т. 127. С. 44–46.

[27] *Avron A.* Natural 3-valued logics — characterization and proof theory // The Journal of Symbolic Logic. 1991. Vol. 56(1). P. 276–294.

[28] *Church A., Rescher N.* Review of Dienes Z.P. On an implication function in many-valued systems of logic // The Journal of Symbolic Logic. 1950. Vol. 15 (1). P. 69–70.

[29] *Ciucci D., Dubois D.* A map of dependencies among three-valued logics // Information Sciences. 2013. Vol. 250. P. 162–177.

[30] *Epstein R.L.* The Semantic Foundations of Logic.Vol. 1: Propositional Logic. Dordrecht: Kluwer, 1990 (2nd ed. 1995). 388 p.

[31] *Finn V., Grigolia R.* Nonsense logics and their algebraic properties // Theoria. 1993. Vol. LIX. Parts 1-3. P. 207–273.

[32] *Karpenko A.S.* A maximal paraconsistent logic: The combination of two three-valued isomorphs of classical propositional logic // Frontiers of Paraconsistent Logic / Eds. by D. Batens, C. Mortensen, G. Priest and J.- P. vanBendegem. Baldock Research Studies Press, 2000. P. 181–187.

[33] *Karpenko A.S., Tomova N.E.* Three-valued Bochvar's logic and literal paralogics: their lattice and functional equivalence // Logic and Logical Philosophy. 2016 (in print).

[34] *Kleene S.C.* On a notation for ordinal numbers // The Journal of Symbolic Logic. 1938. Vol. 3. P. 150–155.

[35] *Lau D.* Function Algebras on Finite Sets: A Basic Course on Many-Valued Logic and Clone Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2006. 670 p.

[36] *Post E.L.* Introduction to a general theory of elementary propositions // American Journal of Mathematics. 1921. Vol. 43(3). P. 163–185. (Reprinted: From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931 / Ed. by J. van Heijenoort. Cambridge: Harvard Univ. Press, 1967. P. 264–283).

[37] *Post E.L.* Two-valued iterative systems // Annals of Mathematical Studies. Vol. 5. Princeton-London, 1941. 122 p.

[38] *Prelovskiy N.N.* Cardinality of sets of closed functional classes in weak 3-valued logics // Logical Investigations. 2013. Vol. 19. P. 334–343.

[39] *Rescher N.* Many-Valued Logic. N.Y.: McGraw Hill, 1969. (Reprinted: Gregg Revivals, Aldershot, 1993). 349 p.

[40] *Rosenberg I.* Über die functionale Vollständigkeit in der mehrvertigen Logiken // Rospravy Československě Academie věd. Rada matematickych a přirodnich věd. Praha. Ročnik 80, 4. 1970. P. 3–93.

[41] *Rosenberg I.* Completeness, closed classes and relations in multiple-valued logics // Internationl Symposium on Multiple-Valued Logic. 14 th. 1974. Morgantown, P. 1–26.

[42] *Tomova N.E.* A Lattice of implicative extensions of regular Kleene's logics // Report on Mathematical Logic. 2012. Vol.47. P. 173–182.

[43] *Tomova N.E.* Natural three-valued logics and classical logic // Logical Investigations. 2013. Vol. 19. P. 344–352.

А.С. Карпенко

ГЛАВА 1.

ТРЕХЗНАЧНЫЕ МАТРИЦЫ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОЙ ЛОГИКИ

1.1. Введение

Эта глава посвящена анализу связи между теоретико-доказательные свойствами логики с функциональными свойствами ее матриц. В качестве примера мы выбрали классическую пропозициональную логику $\mathbf{C_2}$. Глава имеет следующую структуру. Сперва мы определим необходимые синтаксические и семантические понятия и укажем связи между ними. Затем мы приведем краткий обзор предшествующих результатов в исследуемой области, а также сделаем ряд предварительных методологических замечаний. В четвертом параграфе будут сформулированы необходимые и достаточные условия, при которых трехзначная логическая матрица порождает классическое отношение следования. Используя свойство функциональной полноты операций классической логики в двузначном случае, мы перейдем от рассмотрения матриц для фиксированных языков к более абстрактному подходу, при котором результаты распространяются на произвольный пропозициональный язык. Мы докажем, что трехзначная матрица является матрицей для $\mathbf{C_2}$, е.т.е. существует матричный гомоморфизм из этой матрицы в двузначную матрицу с функционально полным набором операций для того же языка. Пятый параграф посвящен максимальным классам классических функций на $\{1, 1/2, 0\}$. Показано, что класс всех функций произвольной трехзначной матрицы для $\mathbf{C_2}$ полностью содержится в одном из классов функций, сохраняющих нетривиальные отношения эквивалентности. Кроме того, приводится пример матрицы, класс функций которой совпадает с максимальным классом классических функций. В заключительном параграфе мы рассматриваем минимальные трехзначные матрицы, порождающие классическое отношение следования. Здесь мы показываем, что, в отличие от двузначного случая, множество замкнутых подклассов функций в трехзначной матрице для $\mathbf{C_2}$ может быть как счетным, так и континуальным. Также, доказывается, что в трехзначном случае операций конъюнкции, дизъюнкции, импликации и отрицания не всегда достаточно, чтобы однозначным образом определить замкнутый класс классических функций.

1.2. Базовые определения

Пусть $Var = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ счетное множество пропозициональных переменных, и $F = \{F_1, \dots, F_m\}$ конечное множество пропозициональных связок, где каждой связке F_i сопоставлено натуральное число $a(F_i)$, которое обозначает число ее аргументов. Будем считать, что $a(F_i) \neq 0$ для некоторого $i \in \{1, \dots, m\}$. Множество формул For определяется индуктивно:

1. $Var \subseteq For$,
2. Для каждого такого $F_i \in F$, что $a(F_i) = k$, $F_i(A_1, \dots, A_k) \in For$, если $A_1, \dots, A_k \in For$,
3. Ничто иное не принадлежит For.

Алгебру формул $L = (For, F_1, \dots, F_m)$, построенную таким образом будем называть *пропозициональным языком*.

Если даны произвольный пропозициональный язык L и две формулы $F_i(A_1, \dots, A_{a(F_i)})$ и $F_j(B_1, \dots, B_{a(F_j)})$ этого языка, будем считать, что $F_i(A_1, \dots, A_{a(F_i)}) = F_j(B_1, \dots, B_{a(F_j)})$, е.т.е. $F_i = F_j$ и $A_1 = B_1, \dots, A_{a(F_i)} = B_{a(F_j)}$.

Пусть A, B формулы L. Формула A называется *случаем подстановки* в B, е.т.е. $A = e(B)$ для некоторого эндоморфизма e в L. В дальнейшем, эндоморфизмы пропозициональных языков будем, как правило, называть *подстановками*. Подстановку формулы A вместо пропозициональной переменной p ($e(p) = A$) в формулу B будем обозначать как $B(p/A)$.

Отношение следования (по Тарскому) для языка L есть бинарное отношение $\vdash$ между $\Gamma \subseteq For$ и $A \in For$, удовлетворяющее следующим трем условиям:

- если $A \in \Gamma$, то $\Gamma \vdash A$ (*рефлексивность*)
- если $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \subseteq \Gamma'$, то $\Gamma' \vdash A$ (*монотонность*)
- если $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma', A \vdash B$, то $\Gamma, \Gamma' \vdash B$ (*транзитивность*)

Пусть $\vdash$ отношение следования по Тарскому для L. Будем говорить, что $\vdash$

- *структурное*, если для каждой подстановки e в L, а также каждых Γ и A, если $\Gamma \vdash A$, то $\{e(B) | B \in \Gamma\} \vdash e(A)$;

- *нетривиальное*, если существуют непустое Γ и формула A, такие что $\Gamma \nvdash A$;

- *финитарное*, если для каждых Γ и A найдется такое *конечное* $\Gamma' \subseteq \Gamma$, что $\Gamma' \vdash A$.

Пропозициональная логика (иначе — *пропозициональное исчисление*) есть такая пара $\mathbf{L} = \langle L, \vdash_{\mathbf{L}} \rangle$, где L пропозициональный язык, и $\vdash_{\mathbf{L}}$ есть структурное и нетривиальное отношение следования для L. Логика $\langle L, \vdash_{\mathbf{L}} \rangle$ *финитарна*, если таково $\vdash_{\mathbf{L}}$.

Тройка $M = \langle V, F, D\rangle$, где $\mathcal{A} = \langle V, F\rangle$ алгебра того же типа, что пропозициональный язык L, и $D \subset V$ непустое собственное подмножество V, называется *матрицей* для L. Элементы D будем называть *выделенными значениями* M.

Пусть $M = \langle \mathcal{A}, D\rangle$ логическая матрица для L. Тогда гомоморфизмы v из L в $\mathcal{A}$ будут называться *оценками* в M. Множество всех оценок, определенных относительно M будем обозначать как $Val(M)$.

Каждой матрице M для L соответствует множество формул, принимающих исключительно выделенные значения:

$$E(M) = \{A \in For : v(A) \in D \text{ для каждого } v \in Val(M)\},$$

которое называется ее *классом тавтологий*.

Матричное отношение следования (иначе — отношение следования, *порожденное* матрицей M) определяется следующим образом: отношение $\models_M \subseteq 2^{For} \times For$ называется матричным следованием M, при условии, что для каждых $\Gamma \subseteq For$, $B \in For$

$$\Gamma \models_M B, \text{ е.т.е. для каждой оценки } v \in Val(M) \text{ верно, что}$$
$$v(B) \in D, \text{ когда } v(\Gamma) \subseteq D.$$

Поскольку тавтология в M, в силу определения, следует из любого, в том числе пустого, множества формул, вместо $A \in E(M)$ будем иногда писать $\models_M A$. Кроме того, будем обозначать как $\models_M$ множество всех таких пар $\langle \Gamma, B\rangle$, где $\Gamma \subseteq For$, $B \in For$ и $\Gamma \models_M B$.

Если $\mathbf{L} = \langle L, \vdash_{\mathbf{L}}\rangle$ логика, $M = \langle \mathcal{A}, D\rangle$ логическая матрица для L, и $\Gamma \models_M$, е.т.е. $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} B$, будем говорить, что M является *матрицей для* $\mathbf{L}$.

Пусть на множестве E^k, имеющем мощность k, задана система функций

$$F = \{f_1(\tilde{x}_1), f_2(\tilde{x}_2), \ldots, f_n(\tilde{x}_n)\},$$

в которой $f_i(\tilde{x}_i) = f_i(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{a(f_i)}})$ и $1 \leq i \leq n$. Называем *суперпозицией* функций F функцию, имеющую вид $g'(\tilde{y}') = g'(y'_1, y'_2, \ldots, y'_{a(g')})$, которая выполняет одно из следующих условий:

- $g'(\tilde{y}')$ получена из $f_i(\tilde{x}_i)$ путем замены переменных.
- $g'(\tilde{y}') = g_n(g_1(\tilde{y}_1), g_2(\tilde{y}_1), \ldots, g_m(\tilde{y}_m))$, где $g_j(\tilde{y}_j)$ есть суперпозиция функций из F и $j \in \{1, \ldots, m, n\}$.

Множество $[F]$ называется *замыканием класса функций* F, если оно содержит все суперпозиции функций над классом F и только их. Если $F = [F]$, будем говорить, что F *замкнуто*, или что F является *подклассом* P_k. Будем называть множество функций F' *полным* в F, если $[F'] = F$. Если же $[F'] \subset F$ и для каждой функции, такой что $f \in F$ и $f \notin F'$, выполняется $[F' \cup f] = F$, множество F' будет называться *предполным* в F.

Пусть $M_1 = \langle \mathcal{A}_1, D_1 \rangle$ и $M_2 = \langle \mathcal{A}_2, D_2 \rangle$ таковы, что их алгебры $\mathcal{A}_1 = \langle V, F_1 \rangle$ и $\mathcal{A}_2 = \langle V, F_2 \rangle$ имеют общее множество-носитель. Если $[F_1] \subseteq [F_2]$, будем говорить, что M_2 является *функциональным расширением* M_1. Если к тому же $[F_2] \subseteq [F_1]$, будем называть M_1 и M_2 *функционально эквивалентными*.

1.3. Классическая пропозициональная логика: трехзначные обобщения

Остановимся подробнее на описании стоящей перед нами задачи. Обычная матрица для классической пропозициональной логики $\mathbf{C_2}$ имеет вид

$$C_2^* = \langle \{1, 0\}, \wedge^*, \vee^*, \supset^*, \neg^*, \{1\} \rangle,$$

где функции на $\{1, 0\}$ задаются следующими таблицами:

$\vee^*$	1	0
1	1	1
0	1	0

$\wedge^*$	1	0
1	1	0
0	0	0

$\supset^*$	1	0
1	1	0
0	1	1

x	$\neg^* x$
1	0
0	1

Как известно, в двузначном случае алгеброй $\mathbf{C_2}$ является булева алгебра, и множество ее функций полно в P_2, классе всех функций, заданных на $\{1,0\}$. Ясно, что в трехзначном случае мы столкнемся с хорошо известными отличиями. Во-первых, не существует трехзначной булевой алгебры. Во-вторых, операции трехзначной матрицы M для $\mathbf{C_2}$ не могут образовывать полную в P_3[1] систему. Ведь эта система содержала бы такой оператор $f(x)$, что $f(1/2) = 0$ и $f(1) = f(0) = 1$. А это означало бы, что найдется такая формула A, что $\vDash_{C_2^*} A$, где C_2^* – обычная двузначная матрица для $\mathbf{C_2}$, и $\nvDash_M A$. Таким образом, представляет интерес вопрос о том, каковы именно алгебраические свойства матриц для классической логики в трехзначном случае, если он существенным образом отличается от стандартного двузначного.

Здесь необходимо сделать важное методологическое отступление. Как отмечает Р. Вуйцицкий [34, p. 23–24], существует два распространенных подхода к рассмотрению логик. В первом случае под «логикой» понимается множество теорем. Во втором «логика» определяется в терминах логического следования. В последнем случае класс теорем определяется как $\{A | \emptyset \ \vdash \ A\}$ — множество формул, следующих из пустого множества посылок. Однако такое множество не определяет однозначным образом отношение $\vdash$ целиком. Это различие особенно актуально для выбранной нами темы. Г. Малиновский рассматривает два возможных критерия многозначности [25, p. 30]:

К1 M задает многозначную логику, е.т.е. ни для какой двухэлементной матрицы N не верно, что $E(M) = E(N)$.

К2 M задает многозначную логику, е.т.е. ни для какой двухэлементной матрицы N не верно, что $\vDash_M = \vDash_N$.

[1] P_3 обозначает множество всех функций на трехэлементном множестве.

Далее, Малиновский приводит следующий пример. Рассмотрим матрицу $M_1 = \langle\{1, 1/2, 0\}, \wedge_1, \vee_1, \rightarrow_1, \neg_1, \{1, 1/2\}\rangle$, базовые операции которой определяются такими таблицами:

$\wedge_1$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	0	0	0

$\vee_1$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1/2	0

$\rightarrow_1$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	1	1/2	1

x	$\neg_1 x$
1	0
1/2	0
0	1

Малиновский отмечает, что $\vDash_{M_1} = \vDash_{C_2^*}$, где C_2^* матрица для классической пропозициональной логики. Как следствие, также имеем $E(M_1) = E(M_{C_2^*})$. Теперь рассмотрим матрицу $M_2 = \langle\{1, 1/2, 0\}, \wedge_2, \vee_2, \rightarrow_2, \neg_2, \{1, 1/2\}\rangle$, где таблицы для базовых операций имеют следующий вид:

$\wedge_2$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	0	0	0
0	0	0	0

$\vee_2$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	0	0
0	1	0	0

$\rightarrow_2$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	1	1	1
0	1	1	1

x	$\neg_2 x$
1	0
1/2	1
0	1

Как указывает Малиновский, можно показать, что $E(M_2) = E(C_2^*)$. Добавим, что подробное доказательство данного утверждения содержится в [7] . В то же время, нетрудно убедиться, что $\vDash_{M_2} \neq \vDash_{C_2^*}$. Пусть $v(p_1) = 1/2$ и $v(p_2) = 0$. Тогда $v(p_1) \in \{1, 1/2\}$, $v(p_1 \rightarrow p_2) \in \{1, 1/2\}$ и $v(p_2) \notin \{1, 1/2\}$. Следовательно, $\{p_1 \rightarrow p_2, p_1\} \nvDash_{M_2} p_2$. Однако $\{p_1 \rightarrow p_2, p_1\} \vDash_{C_2^*} p_2$.

Таким образом, M_2 порождает многозначную логику согласно критерию К2, но не согласно критерию К1. Заметим, что при этом $\{A_1 \to A_2, A_1\} \vDash_{M_2} A_2$ для всех $A_1, A_2 \in E(M_2)$. То есть, в данном случае правило *modus ponens* не всегда сохраняет истинность формул, но всегда сохраняет свойство «быть тавтологией». Более подробный анализ различий между «сильным» и «слабым» *modus ponens* проводится в Главе 3 этой книги.

Дополним рассуждения Малиновского еще одним ярким примером — логикой парадоксов **LP**, построенной Г. Пристом [14]. Матрицу этой логики обозначим как $LP = \langle \{1, 1/2, 0\}, \wedge_3, \vee_3, \to_3, \neg_3, \{1, 1/2\} \rangle$, а ее базовые операции определим следующим образом:

$\wedge_3$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	0	0	0

$\vee_3$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1/2	0

$\to_3$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1	1

x	$\neg_3 x$
1	0
1/2	1/2
0	1

Как и в случае с M_2, $E(LP) = E(C_2^*)$, а $\vDash_{LP}$ есть собственное подмножество $\vDash_{C_2^*}$ [26]. Логика **LP** получила известность как одна из максимальных паранепротиворечивых логик. То есть, таких паранепротиворечивых логик, которые не имеют паранепротиворечивых собственных расширений. Как показал А. Пинко [29], **LP** представляет собой наибольшую паранепротиворечивую логику, удовлетворяющую условиям Тарского для классических конъюнкции и дизъюнкции вместе с Законами де Моргана. О. Ариэли с соавторами ([16], [17]) рассматривают **LP** как один из примеров «естественных» паранепротиворечивых логик и показывают, что каждая естественная паранепротиворечивая логика является максимальной. Стоит обратить внимание, что в этих работах также подчеркивается различие между максимальностью относительно теорем и относительно следования.

Таким образом, мы видим, что нарушение условия K1 не является достаточным основанием утверждать, что трехзначная матрица порождает классическую логику.

Далее мы сфокусируем внимание на трехзначных матрицах, нарушающих условие K2. В существующей литературе доступно немало примеров подобных матриц. Исторически первым таким примером является фрагмент матрицы для трехзначной логики Бочвара $\mathbf{B}_3$ [1]. Мы еще вернемся к нему в заключительном параграфе данной главы. Также, примеры интересующих нас матриц приводят Н. Решер [16, p. 165, 174], Р.Л. Эпштейн [21, p. 256–257], А.С. Карпенко [8, с. 52–54].

Дж.Б. Россер и А.Р. Тюркетт [31, p. 22] предложили обобщение классических импликации и отрицания на многозначный случай[2]:

$$-x = \begin{cases} 1, \text{если } x \notin D \\ 0, \text{если } y \in D \end{cases} \qquad x \supset y = \begin{cases} 1, \text{если } x \notin D \\ y, \text{если } x \in D \end{cases}$$

В трехзначном случае такие определения приводят нас к матрицам $M^1 = \langle\{1, 1/2, 0\}, \supset_1, -_1, \{1\}\rangle$ и $M^2 = \langle\{1, 1/2, 0\}, \supset_2, -_2, \{1, 1/2\}\rangle$, со следующими базовыми операциями:

[2]Аналогичное определение для $\supset$ также было независимо построено А. Авроном при рассмотрении класса «естественных» трехзначных логик [18].

$\supset_1$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	1	1	1
0	1	1	1

x	$-_1x$
1	0
$1/2$	1
0	1

$\supset_2$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	1	$1/2$	0
0	1	1	1

x	$-_2x$
1	0
$1/2$	0
0	1

Отметим, что импликация $\supset_1$ была независимо введена в [32] при построении аксиоматизации трехзначной логики Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$. Как отмечает Р. Вуйцицкий [35, p. 72], использование такой импликации позволяет представить $\mathbf{Ł_3}$ как расширение $\mathbf{C_2}$.

Импликация $\supset_2$ была изначально предложена С. Яськовским [23] при построении матрицы, фальсифицирующей Закон Дунса Скота — $(p_1 \to (\neg p_1 \to p_2))$. Такую же операцию использует Р.Л. Эпштейн, когда строит матрицу для паранепротиворечивой логики Д'Оттавиано и да Коста $\mathbf{J_3}$. Автор показывает, что благодаря этому $\mathbf{J_3}$, как и $\mathbf{Ł_3}$ с операцией $\supset_1$, может быть представлена в виде расширения $\mathbf{C_2}$ отрицанием логики Лукасевича [21, p. 267–273].

Важно отметить, что все известные нам примеры трехзначных матриц для классической логики, как в работах других авторов, так и рассмотренные нами в ранее [2, 3, 4, 5, 6], касаются матриц для фиксированных языков. Отличие подхода, применяемого ниже, состоит в том, что мы описываем интересующие нас свойства матриц в терминах функциональных свойств их базовых операций. Таким образом, полученные результаты имеют место для произвольного пропозиционального языка.

1.4. Матрицы для произвольного пропозиционального языка и классическое отношение следования

Как мы отметили выше, обычная матрица для $\mathbf{C_2}$ имеет вид $C_2^* = \langle\{1,0\}, \wedge^*, \vee^*, \supset^*, \neg^*, \{1\}\rangle$. Ясно, что C_2^* матрица для пропозиционального языка, единственными связками которого являются $\wedge$, $\vee$, $\supset$ и $\neg$. Чтобы наши результаты распространялись на все варианты $\mathbf{C_2}$, потребуется переопределить двузначную матрицу для классической логики, отказавшись от привязки к языку фиксированного типа. Класс операций булевой алгебры полон в P_2. Иными словами, любая функция на $\{1,0\}$ представима в виде полинома, содержащего только функции $\wedge^*$, $\vee^*$ и $\neg^*$. Это позволяет дать следующее обобщенное определение.

Будем называть *двузначной матрицей для классической пропозициональной логики* матрицу $C_2 = \langle\{1,0\}, C_2, \{1\}\rangle$[3] для пропозиционального языка L, где $[C_2] = P_2$. Обозначим следование, порождаемое этой матрицей как $\vDash_{C_2}$.

Теперь пусть $M = \langle\{1, 1/2, 0\}, F, D\rangle$ трехзначная матрица для L, и $\vDash_M = \vDash_{C_2}$. В этом случае будем говорить, что M *порождает классическое отношение следования*, или что M есть *трехзначная матрица для* $\mathbf{C_2}$.

Поскольку класс C_2 полон в P_2, в следующие операции следующие операции представимы в виде полиномов, содержащих только функции из C_2:

- $f_\wedge(x, y) = 1$, е.т.е. $x = 1$ и $y = 1$,
- $f_\neg(x) = 1$, е.т.е. $x = 0$.

Ясно, что в обоих случая представление не является единственным. Однако это не играет роли в наших построениях.

[3]Поскольку в данном случае множества V и D зафиксированы, мы обозначим класс базовых операций таким же образом, как и саму матрицу.

Выберем произвольным образом и зафиксируем по одному полиному на каждую из рассматриваемых функций. В этом случае, так как имеется взаимно-однозначное соответствие между операциями из C_2 и связками пропозиционального языка L [33], существует такая формула языка L (иначе — L-формула) $A_\wedge(p_1, p_2)$, что $f_\wedge(x, y)$ — единственная операция, соответствующая $A_\wedge$. Аналогично, если M матрица для L, то имеется взаимно-однозначное соответствие между операциями из F и связками языка L. В этом случае существует единственная операция из $[F]$, соответствующая $A_\wedge(p_1, p_2)$. Обозначим ее как $g_\wedge(x, y)$. Проделаем то же самое для $A_\neg(p_1)$ и $g_\neg(x)$. Будем использовать $p_1 \wedge p_2$ и $\neg p_1$ как сокращения для $A_\wedge(p_1, p_2)$ и $A_\neg(p_1)$. Определим класс $For_{\wedge,\neg}$ следующим образом:

- если $p_i \in Var$, то $p_i \in For_{\wedge,\neg}$;
- если $A_1 \in For_{\wedge,\neg}$ и $A_2 \in For_{\wedge,\neg}$, то $A_1 \wedge A_2 \in For_{\wedge,\neg}$ и $\neg A_1 \in For_{\wedge,\neg}$;
- ничто иное не принадлежит $For_{\wedge,\neg}$.

Элементы класса $For_{\wedge,\neg}$ будем называть $L_{\wedge\neg}$-формулами. Поскольку $For_{\wedge,\neg} \subseteq For$, верно следующее.

Утверждение 1. Если для каждого множества L-формул Γ и каждой L-формулы A верно, что $\langle \Gamma, A \rangle \in \models_M$, е.т.е. $\langle \Gamma, A \rangle \in \models_{C_2}$, то для каждого множества $L_{\wedge\neg}$-формул Γ^* и каждой $L_{\wedge\neg}$-формулы A^* верно, что $\langle \Gamma^*, A^* \rangle \in \models_M$, е.т.е. $\langle \Gamma^*, A^* \rangle \in \models_{C_2}$.

На основе утверждения 1 можно доказать лемму 1, описывающую свойства $g_\wedge(x, y)$ и $g_\neg(x)$ из $[F]$.

Лемма 1. *Если для каждого множества L-формул Γ и каждой L-формулы A верно, что $\langle\Gamma, A\rangle \in \vDash_M$, е.т.е. $\langle\Gamma, A\rangle \in \vDash_{C_2}$, то*

- $g_\wedge(x, y) \in D$, *е.т.е.* $x \in D$ *и* $y \in D$*;*
- $g_\neg(x) \in D$, *е.т.е.* $x \notin D$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Случай 1 ($\Rightarrow$). Допустим, что для некоторых a_1 и a_2 из $\{1, 1/2, 0\}$ имеет место $g_\wedge(a_1, a_2) \in D$ и $a_1 \notin D$.

Пусть p_1 и p_2 пропозициональные переменные, и v' такая оценка в M, что $v'(p_1) = a_1$ и $v'(p_2) = a_2$. В силу определения оценки, $v'(p_1 \wedge p_2) = g_\wedge(v'(p_1), v'(p_2))$. Следовательно, v' такая оценка в M, что $v'(p_1 \wedge p_2) \in D$ и $v'(p_1) \notin D$. В силу определения $\vDash$, $p_1 \wedge p_2 \nvDash_M p_1$. Тогда, по условию леммы, $p_1 \wedge p_2 \nvDash_{C_2} p_1$. Таким образом, существует такая оценка u' в C_2, что $u'(p_1 \wedge p_2) = 1$ и $u'(p_1) \neq 1$. Согласно определению оценки, $u'(p_1 \wedge p_2) = f_\wedge(u'(p_1), u'(p_2))$. В то же время, $f_\wedge(u'(p_1), u'(p_2)) = 1$, е.т.е. $u'(p_1) = 1$ и $u'(p_2) = 1$. Таким образом, $f_\wedge(u'(p_1), u'(p_2)) \neq 1$ и $u'(p_1 \wedge p_2) \neq 1$. Но это приводит к противоречию. Следовательно, допущение неверно. Рассуждение для y аналогично.

Теперь рассмотрим случай 2 ($\Leftarrow$). Допущение: пусть для некоторых a_1 и a_2 из $\{1, 1/2, 0\}$ верно, что $g_\wedge(a_1, a_2) \notin D$, $a_1 \in D$ и $a_2 \in D$.

Пусть p_1 и p_2 пропозициональные переменные, и v' такая оценка в M, что $v'(p_1) = a_1$ и $v'(p_2) = a_2$. По определению оценки, $v'(p_1 \wedge p_2) = g_\wedge(v'(p_1), v'(p_2))$. Таким образом, $v'(p_1 \wedge p_2) \notin D$, $v'(p_1) \in D$, $v'(p_2) \in D$. По определению $\vDash$, в этом случае $p_1, p_2 \nvDash_M p_1 \wedge p_2$. Согласно условию леммы, $p_1, p_2 \nvDash_{C_2} p_1 \wedge p_2$. Это значит, что существует такая оценка u' в C_2, что $u'(p_1 \wedge p_2) \neq 1$, $u'(p_1) = 1$ и $u'(p_2) = 1$. По определению оценки, $u'(p_1 \wedge p_2) = f_\wedge(u'(p_1), u'(p_2))$. По определению

$f_\wedge(x, y)$, $f_\wedge(u'(p_1), u'(p_2)) = 1$, е.т.е. $u'(p_1) = 1$ и $u'(p_2) = 1$. Поэтому $f_\wedge(u'(p_1), u'(p_2)) = 1$ и $u'(p_1 \wedge p_2) = 1$. Но это приводит к противоречию. Следовательно, допущение неверно.

Переходим ко второму утверждению. Случай 1 ($\Rightarrow$). Допущение: пусть для некоторого a_1 из $\{1, 1/2, 0\}$ верно, что $g_\neg(a_1) \in D$ и $a_1 \in D$.

Пусть p_1 и p_2 пропозициональные переменные, и v' такая оценка в M, что $v'(p_1) = a_1$ и $v'(p_2) \notin D$. По определению оценки, $v'(\neg p_1) = g_\neg(v'(p_1))$. Следовательно, $v'(\neg p_1) \in D$, $v'(p_1) \in D$ и $v'(p_2) \notin D$. По определению $\vDash$ получаем, что $p_1, \neg p_1 \nvDash_M p_2$. По условию леммы, отсюда вытекает, что $p_1, \neg p_1 \nvDash_{C_2} p_2$. Следовательно, существует такая оценка u' в C_2, что $u'(p_2) \neq 1$, $u'(p_1) = 1$ и $u'(\neg p_1) = 1$. По определению оценки, $u'(\neg p_1) = f_\neg(u'(p_1))$. По определению $f_\neg(x)$, $f_\neg(u'(p_1)) = 1$, е.т.е. $u'(p_1) = 0$. Таким образом, $f_\neg(u'(p_1)) \neq 1$ и $u'(\neg p_1) \neq 1$. Но это ведет к противоречию. Следовательно, допущение неверно.

Теперь рассмотрим случай 2 ($\Leftarrow$). Допущение: пусть для некоторого a_1 из $\{1, 1/2, 0\}$ верно, что $g_\neg(a_1) \notin D$ и $a_1 \notin D$.

Пусть p_1 и p_2 пропозициональные переменные, и v' такая оценка в M, что $v'(p_1) = a_1$ и $v'(p_2) \in D$. По определению оценки, $v'(\neg p_1) = g_\neg(v'(p_1))$. Таким образом, $v'(\neg p_1) \notin D$, $v'(p_1) \notin D$ и $v'(p_2) \in D$. Из определений $f_\wedge(x, y)$ и $f_\neg(x)$ получаем, что $f_\neg(f_\wedge(y, f_\neg(y))) = 1$ для каждого y из $\{1, 0\}$ То есть, $u(\neg(p_1 \wedge \neg p_1)) = 1$ для каждой оценки u в C_2. В силу определения $\vDash$, $p_2 \vDash_{C_2} \neg(p_1 \wedge \neg p_1)$. Отсюда, по условию леммы, $p_2 \vDash_M \neg(p_1 \wedge \neg p_1)$. Следовательно, $v(\neg(p_1 \wedge \neg p_1)) \in D$ для каждой оценки v в C_2. Поэтому, в силу определения оценки, $g_\neg(g_\wedge(x, g_\neg(x))) \in D$ для каждого x из $\{1, 1/2, 0\}$. Таким образом, $g_\neg(g_\wedge(a_1, g_\neg(a_1))) \in D$. В силу уже доказанного случая 1 второго утверждения настоящей леммы, если $g_\neg(x) \in D$, то $x \notin D$. Отсюда $g_\wedge(a_1, g_\neg(a_1)) \notin D$ и $g_\wedge(a_1, g_\neg(a_1)) \neq a_1$. Значит, существует такой элемент a_1' из $\{1, 1/2, 0\}$, что $a_1' \neq a_1$, $a_1' \notin D$

и $g_\neg(a'_1) \in D$. Таким образом, поскольку $\{1, 1/2, 0\}$ и $D \neq \emptyset$, $g_\neg(a_1) = a_1$ или $g_\neg(a_1) = a'_1$.

Допустим, что $g_\neg(a_1) = a'_1$. Тогда $g_\neg(g_\neg(a_1)) \in D$, $g_\neg(g_\neg(v'(p_1))) \in D$ и $v'(\neg\neg p_1) \in D$. По определению v', $v'(p_1) \notin D$. Следовательно, $\neg\neg p_1 \nvDash_M p_1$, и, по условию леммы, $\neg\neg p_1 \nvDash_{C_2} p_1$. Значит, существует такая оценка u' в C_2, что $u'(p_1) \neq 1$ и $u'(\neg\neg p_1) = 1$. По определению оценки, $u'(\neg\neg p_1) = f_\neg(f_\neg(u'(p_1)))$. По определению $f_\neg(x)$, $f_\neg(x) = 1$, е.т.е. $x = 0$. Таким образом, $f_\neg(f_\neg(u'(p_1))) \neq 1$ и $u'(\neg\neg p_1) \neq 1$. Однако это ведет к противоречию. Таким образом, допущение неверно. Следовательно, $g_\neg(a_1) = a_1$.

Итак, пусть $g_\neg(a_1) = a_1$. Тогда $g_\neg(a_1) = g_\neg(g_\neg(a_1))$ и, следовательно, $g_\neg(g_\wedge(a_1, g_\neg(g_\neg(a_1)))) \in D$. По определению оценки, $v'(\neg(p_1 \wedge \neg\neg p_1)) = g_\neg(g_\wedge(a_1, g_\neg(g_\neg(v'(p_1)))))$. Отсюда, по определению v', имеем $v'(\neg(p_1 \wedge \neg\neg p_1)) \in D$. В то же время, $\neg v'(p_1) \notin D$. Следовательно, $\neg(p_1 \wedge \neg\neg p_1) \nvDash_M \neg p_1$. В силу условия леммы, отсюда вытекает, что $\neg(p_1 \wedge \neg\neg p_1) \nvDash_{C_2} \neg p_1$. Таким образом, существует такая оценка u' в C_2, что $u'(\neg p_1) \neq 1$ и $u'(\neg(p_1 \wedge \neg\neg p_1)) = 1$. В силу определения оценки, $u'(\neg p_1) = f_\neg(u'(p_1))$. Следовательно, $f_\neg(u'(p_1)) \neq 1$. Так как $f_\neg(x) \neq 1$, е.т.е. $x = 1$, $u'(p_1) = 1$. По определению оценки, $u'(\neg(p_1 \wedge \neg\neg p_1)) = f_\neg(f_\wedge(u'(p_1), f_\neg(f_\neg(u'(p_1)))))$. В силу определений $f_\neg(x)$ и $f_\wedge(x, y)$ получаем, что $u'(\neg(p_1 \wedge \neg\neg p_1)) \neq 1$. Однако это ведет к противоречию. Следовательно, допущение, что для некоторого a_1 из $\{1, 1/2, 0\}$ имеет место $g_\neg(a_1) \notin D$ и $a_1 \notin D$, является неверным. Лемма доказана. $\square$

Теперь сформулируем и докажем теорему о необходимых и достаточных условиях, которыми должна обладать трехзначная матрица M для языка L, чтобы имело место $\Gamma \vDash_M A$, е.т.е. $\Gamma \vDash_{C_2} A$ для каждого множества L-формул Γ и каждой L-формулы A. Для этого нам потребуется ввести еще одно понятие.

Матричным гомоморфизмом из $M_1 = \langle V_1, F_1, D_1 \rangle$ на $M_2 = \langle V_2, F_2, D_2 \rangle$ будем называть такое отображение h, что

- $h(g_i(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f_i(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n))$ и
- $h(a_j) \in D_2$, е.т.е. $a_j \in D_1$,

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_j \in A_1$, а $g_i \in [F_1]$, $f_i \in [F_2]$ — операции, сопоставленные некоторой L-формуле $F_i(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

Теорема 1. *Трехзначная матрица M является матрицей для* $\mathbf{C_2}$ *(то есть, $\vDash_M = \vDash_{C_2}$), е.т.е. существует матричный гомоморфизм из M на C_2.*

Доказательство. Определим отображение h из M на C_2 следующим образом: $h(a_j) = 1$, е.т.е. $a_j \in D$. Для доказательства теоремы необходимо показать, что h является матричным гомоморфизмом, е.т.е. $\vDash_M = \vDash_{C_2}$. Достаточно рассмотреть следующие случаи:

1. Для любого множества L-формул Γ и любой L-формулы A верно, что $\Gamma \vDash_M A$, е.т.е. $\Gamma \vDash_{C_2} A$, и найдется такая формула $F_i(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, что $h(g_i(a_1, a_2, \ldots, a_n)) \neq f_i(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n))$.

2. Для каждой формулы $F_i(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ выполняется $h(g_i(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f_i(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n))$, однако найдутся множество L-формул Γ и L-формула A, такие что

   2.1. $\Gamma \vDash_M A$ и $\Gamma \nvDash_{C_2} A$, или

   2.2. $\Gamma \nvDash_M A$ и $\Gamma \vDash_{C_2} A$.

Рассмотрим случай 1. В силу функциональной полноты $\{f_\wedge, f_\neg\}$, для каждой L-формулы A существует такая $L_{\wedge\neg}$-формула A^* ($a(A) = a(A^*) = n$), что $u(A) = u(A^*)$ для каждой оценки u в C_2. Таким образом, $A \vDash_{C_2} A^*$ и $A^* \vDash_{C_2} A$.

В силу условия рассматриваемого случая и того факта, что $For_{\wedge,\neg} \subseteq For$, имеет место $A \vDash_M A^*$ и $A^* \vDash_M A$. Отсюда, $v(A) \in D$, е.т.е. $v(A^*) \in D$ для каждой оценки v в M. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [C_2]$ и $g(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in [F]$ функции, сопоставленные формуле A, а $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [C_2]$ и $g^*(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in [F]$ функции, сопоставленные формуле A^*. Тогда имеет место следующее:

- $h(g(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = h(g^*(a_1, a_2, \ldots, a_n))$ для всех $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{1, 1/2, 0\}$.
- $f(b_1, b_2, \ldots, b_n) = f^*(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ для всех $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \{1, 0\}$.

Пусть A такая формула, что $h(g(a_1, a_2, \ldots, a_n)) \neq f(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n))$ для некоторых $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из $\{1, 1/2, 0\}$. В силу сказанного выше, в этом случае $h^*(g(a_1, a_2, \ldots, a_n)) \neq f^*(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n))$. Покажем, что это невозможно, используя индукцию по числу вхождений связок в $L_{\wedge\neg}$-формулу.

Базис индукции: A^* есть пропозициональная переменная. Доказательство очевидно. Индуктивное допущение: $h^*(g(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f^*(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n))$, если A^* содержит не более j вхождений $\wedge$ и $\neg$. Предположим, что A^* содержит $j+1$ вхождений $\wedge$ и $\neg$. Требуется рассмотреть два случая:

(a) $A^* = \neg B$;

(b) $A^* = B \wedge C$.

Рассмотрим случай (a). Формула B содержит j вхождений $\wedge$ и $\neg$. Следовательно, $h(g'(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f'(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n))$, если $f'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [C_2]$ и $g'(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in [F]$ функции, сопоставленные формуле B. Это означает, что $g'(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$, е.т.е. $f'(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)) = 1$. В силу определения $f_\neg(x)$ и леммы 1, $g_\neg(g'(a_1, a_2, \ldots, a_n)) \notin D$, е.т.е. $f_\neg(f'(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n))) \neq 1$. Таким образом, $h(g_\neg(g'(a_1, a_2, \ldots, a_n))) \neq f_\neg(f'(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)))$, е.т.е. $h(g'(a_1, a_2, \ldots, a_n)) \neq f'(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n))$. Но это приводит к противоречию.

Рассмотрим случай (b). Каждая из формул B и C содержит не более j вхождений $\wedge$ и $\neg$. Пусть $f'(x_{1_1}, x_{1_2}, \ldots, x_{1_k}) \in [C_2]$ и $g'(y_{1_1}, y_{1_2}, \ldots, y_{1_k}) \in [F]$ функции, сопоставленные формуле B, а $f''(x_{2_1}, x_{2_2}, \ldots, x_{2_m}) \in [C_2]$ и $g''(y_{2_1}, y_{2_2}, \ldots, y_{2_m}) \in [F]$ функции, сопоставленные формуле C. В силу индуктивного допущения, $g'(a_{1_1}, a_{1_2}, \ldots, a_{1_k}) \in D$, е.т.е. $f'(h(a_{1_1}), h(a_{1_2}), \ldots, h(a_{1_k})) = 1$. Аналогично для $g''(a_{2_1}, a_{2_2}, \ldots, a_{2_m})$. В силу определения $f_\wedge(x, y)$ и леммы 1, $g_\wedge(g'(a_{1_1}, a_{1_2}, \ldots, a_{1_k}), g''(a_{2_1}, a_{2_2}, \ldots, a_{2_m})) \in D$, е.т.е. $f_\wedge(f'(h(a_{1_1}), h(a_{1_2}), \ldots, h(a_{1_k})), f''(h(a_{2_1}), h(a_{2_2}), \ldots, h(a_{2_m}))) = 1$. Отсюда вытекает, что

$$
\begin{gathered}
h(g_\wedge(g'(a_{1_1}, a_{1_2}, \ldots, a_{1_k}), g''(a_{2_1}, a_{2_2}, \ldots, a_{2_m}))) \neq \\
f_\wedge(f'(h(a_{1_1}), h(a_{1_2}), \ldots, h(a_{1_k})), f''(h(a_{2_1}), h(a_{2_2}), \ldots, h(a_{2_m}))),
\end{gathered}
$$

е.т.е. $h(g'(a_{1_1}, a_{1_2}, \ldots, a_{1_k})) \neq f'(h(a_{1_1}), h(a_{1_2}), \ldots, h(a_{1_k}))$ или $h(g''(a_{2_1}, a_{2_2}, \ldots, a_{2_m})) \neq f''(h(a_{2_1}), h(a_{2_2}), \ldots, h(a_{2_m}))$. Но это противоречит индуктивному допущению. Это завершает рассмотрения случая 1 доказательства теоремы.

Рассмотрим случай 2.1. Пусть $\Gamma \vDash_M A$ и $\Gamma \nvDash_{C_2} A$ для некоторого множества L-формул Γ и некоторой L-формулы A. Тогда существует такая оценка u в C_2, что $u(\Gamma) = 1$ (то есть, каждая формула из Γ принимает значение 1) и $u(A) \neq 1$. Поскольку h есть отображение из $\{1, {}^1\!/\!_2, 0\}$ на $\{1, 0\}$, и $h(a_j) = 1$, е.т.е. $a_j \in D$, для каждого $b_i \in \{1, 0\}$ найдется такое $a_i \in \{1, {}^1\!/\!_2, 0\}$, что $h(a_i) = b_i$. Пусть u такая оценка, что $u(p_i) = b_i$ для каждой пропозициональной переменной. В этом случае

$$u(F_j(p_1, p_2, \ldots, p_n)) = f_j(u(p_1), u(p_2), \ldots, u(p_n)) =$$
$$f_j(b_1, b_2, \ldots, b_n) = f_j(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)).$$

Если $\tilde{u}$ такая оценка в M, что $\tilde{u}(p_i) = a_i$, то

$$\tilde{u}(F_j(p_1, p_2, \ldots, p_n)) = g_j(\tilde{u}(p_1), \tilde{u}(p_2), \ldots, \tilde{u}(p_n)) =$$
$$g_j(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Так как $h(g_j(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f_j(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n))$, $g_j(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$, е.т.е $f_j(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)) = 1$. Из этого следует, что $\tilde{u}(\Gamma) \in D$ и $\tilde{u}(A) \notin D$. Однако в таком случае $\Gamma \not\models_M A$, и мы приходим к противоречию.

Наконец, рассмотрим случай 2.2. Пусть $\Gamma \not\models_M A$ и $\Gamma \models_{C_2} A$ для некоторого множества L-формул Γ и некоторой L-формулы A. Тогда существует такая оценка v в M, что $v(\Gamma) \in D$ и $v(A) \notin D$. Пусть v такая оценка, что $u(p_i) = a_i$ для каждой пропозициональной переменной. Определим оценку $\overline{v}$ в C_2 следующим образом: $\overline{v}(p_i) = h(a_i)$. Согласно определению оценки, $v(F_j(p_1, p_2, \ldots, p_n)) = g_j(v(p_1), v(p_2), \ldots, v(p_n)) = g_j(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. В этом случае, $\overline{v}(F_j(p_1, p_2, \ldots, p_n)) = f_j(\overline{v}(p_1), \overline{v}(p_2), \ldots, \overline{v}(p_n)) = f_j(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n))$. Как и в предыдущем случае, поскольку $h(g_j(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f_j(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n))$, получаем $g_j(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$, е.т.е $f_j(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)) = 1$. Иными словами, если $v(\Gamma) \in D$ и $v(A) \notin D$, то $\overline{v}(\Gamma) = 1$ и $\overline{v}(A) \neq 1$. Но таким образом мы приходим к противоречию, так как по условию $\Gamma \models_{C_2} A$. Это завершает рассмотрение случая 2.2. и доказательство теоремы. $\square$

Таким образом, мы доказали теорему о *необходимых* и *достаточных* условиях, чтобы отношение логического следования в произвольной трехзначной матрице было классическим.

В рассматриваемом ниже следствии из теоремы 1 мы сформулируем *необходимое* условие на основе внутренних свойств трехзначной матрицы M, не прибегая к сравнению с соответствующей двузначной матрицей C_2.

Следствие 1. Пусть $M = \langle\{1, 1/2, 0\}, F, D\rangle$ матрица для языка L, и ϕ такое отображение множества $\{1, 1/2, 0\}$ в себя само, что

$$\phi(a_i) = \begin{cases} b \in D, \text{если } a_i \in D, \\ c \notin D, \text{если } a_i \notin D. \end{cases}$$

Теперь пусть $\vDash_M = \vDash_{C_2}$. Тогда для каждой операции $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из $[F]$ верно, что для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{1, 1/2, 0\}$ имеет место

$$\phi(g(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = \phi(g(\phi(a_1), \phi(a_2), \ldots, \phi(a_n))).$$

Доказательство. В силу теоремы 1, достаточно показать, что если для всех $a_1, a_2, \ldots, a_n$ верно, что $h(g(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n))$, то для всех $a_1, a_2, \ldots, a_n$ верно, что $\phi(g(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = \phi(g(\phi(a_1), \phi(a_2), \ldots, \phi(a_n)))$.

Допустим, что для всех $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеет место

$$h(g(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)).$$

1. В силу определений h и ϕ, $\phi(g(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = b$, е.т.е. $h(g(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = 1$, и $\phi(g(a_1, a_2, \ldots, a_n)) =$ c, е.т.е. $h(g(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = 0$.

2. Согласно сделанному выше допущению, $h(g(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n))$.

3. В то же время, $h(a_i) = h(\phi(a_i))$.

4. Поэтому имеет место $f(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)) = f(h(\phi(a_1)), h(\phi(a_2)), \ldots, h(\phi(a_n)))$.

5. Кроме того, $f(h(\phi(a_1)), h(\phi(a_2)), \ldots, h(\phi(a_n))) = h(g(\phi(a_1), \phi(a_2), \ldots, \phi(a_n))$.

6. Однако в силу определений h и ϕ, $h(g(\phi(a_1), \phi(a_2), \ldots, \phi(a_n)) = 1$, е.т.е. $\phi(g(\phi(a_1), \phi(a_2), \ldots, \phi(a_n)) = b$, и $h(g(\phi(a_1), \phi(a_2), \ldots, \phi(a_n)) = 0$, е.т.е. $\phi(g(\phi(a_1), \phi(a_2), \ldots, \phi(a_n)) = $ c.

7. Таким образом, $\phi(g(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = \phi(g(\phi(a_1), \phi(a_2), \ldots, \phi(a_n)))$.

$\square$

Завершим этот параграф следующим замечанием, которое вытекает из теоремы 1 и следствия 1. Если $M = \langle\{1, 1/2, 0\}, F, D\rangle$ матрица для $\mathbf{C_2}$, то $[F]$ есть гомоморфный прообраз P_2. Это следует из нашего определения двузначной матрицы C_2 для произвольного пропозиционального языка. Кроме того, для каждого класса $F' \subseteq P_3$, если он является гомоморфным прообразом P_2 относительно некоторого гомоморфизма h', можно построить матрицу $M' = \langle\{1, 1/2, 0\}, F', D'\rangle$ для $\mathbf{C_2}$. Для этого класс D' должен выполнять следующее условие: $\langle a_1, a_1'\rangle \in D'$, е.т.е. $h'(a_1) = h'(a_1')$. Это подводит нас к теме следующего параграфа.

1.5. Максимальные классы трехзначных классических функций

В предыдущем разделе мы установили, что трехзначная матрица M является матрицей для $\mathbf{C_2}$, е.т.е. существует матричный гомоморфизм из M на C_2. Обычным образом, мы можем осуществить переход от матричного гомоморфизма к матричной конгруэнтности.

$$\langle a_1, a_1'\rangle \in \kappa_h, \text{ е.т.е. } h(a_1) = h(a_1').$$

Поскольку мы ограничили область изучения трехзначным случаем, матрицы, которые мы рассматриваем, могут различаться лишь элементами $[F]$ и D. Ясно, что выбор класса выделенных значений влияет на структуру κ_h. Например,

- если $D = \{1\}$, то $\langle 0, {}^1\!/\!_2 \rangle \in \kappa_h$;
- если $D = \{{}^1\!/\!_2, 1\}$, то $\langle {}^1\!/\!_2, 1 \rangle \in \kappa_h$.

Если мы зафиксируем содержимое класса выделенных значений M, который предопределяет структуру матричной конгруэтности κ_h на M, содержание $[F]$ окажется единственной переменной.

При этом, связь между гомоморфизмом h и отношением конгруэнтности κ_h позволяет сделать следующее утверждение. Если $\vDash_M = \vDash_{C_2}$, то для каждой операции $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из $[F]$ верно, что

$$\{\langle a_1, a_1' \rangle, \langle a_2, a_2' \rangle, \ldots, \langle a_n, a_n' \rangle\} \subseteq \kappa_h, \text{ е.т.е.}$$
$$\langle g(a_1, a_2, \ldots, a_n), g(a_1', a_2', \ldots, a_n') \rangle \in \kappa_h.$$

Иными словами, каждая функция произвольной трехзначной матрицы для $\mathbf{C_2}$ сохраняет разбиение π множества $\{1, {}^1\!/\!_2, 0\}$, соответствующее κ_h.

Поскольку κ_h зависит от D, возможны следующие варианты разбиений:

- $\pi_1 = \{\{1\}\{{}^1\!/\!_2, 0\}\}$ для $D = \{1\}$ и $D = \{{}^1\!/\!_2, 0\}$,
- $\pi_{1/2} = \{\{{}^1\!/\!_2\}\{1, 0\}\}$ для $D = \{{}^1\!/\!_2\}$ и $D = \{1, 0\}$,
- $\pi_0 = \{\{0\}\{1, {}^1\!/\!_2\}\}$ для $D = \{0\}$ и $D = \{1, 0\}$.

Будем говорить, что функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на $\{1, {}^1\!/\!_2, 0\}$ является *классической относительно* D (иначе — D-*классической*), е.т.е. она сохраняет разбиение π_i $(i \in \{1, {}^1\!/\!_2, 0\})$, соответствующее D.

Если матрица M является матрицей для $\mathbf{C_2}$, то класс всех ее функций $[F]$ содержит только D-классические функции. Однако отметим, что не любая матрица с классическим классом функций является матрицей для $\mathbf{C_2}$. Это следует из того факта, что гомомоморфные прообразы в P_3 собственных подклассов P_2 также сохраняют разбиения вида π_i. Пример: пусть $[\{f_\wedge, f_\vee, f_\supset, f_\neg\}]$ гомоморфный прообраз P_2. Тогда $[\{f_\wedge, f_\vee, f_\supset\}]$ гомоморфный прообраз собственного подкласса P_2, который сохраняет значение 1.

Пусть $[F]$ класс D-классических функций, не имеющий такого расширения $[F \cup f]$ $(f \notin [F])$, что все элементы этого расширения являются D-классическими функциями. В этом случае будем говорить, что $[F]$ — *максимальный класс функций, классических относительно* D. Если M является матрицей для $\mathbf{C_2}$, и множество всех ее функций $[F]$ является максимальным классом функций, классических относительно D, будем называть такую матрицу *максимальной матрицей для* $\mathbf{C_2}$.

Ниже мы проведем исследование максимального класса функций, классических относительно $D = \{1\}$, и максимальной матрицы, соответствующей этому классу.

С.В. Яблонский предложил следующее определение классов функций типа U [14]. Пусть задано разбиение π множества E^k:

$$E^K = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{E}_s,$$

где множества $\mathcal{E}_i$ попарно без общих элементов и $1 \leq s \leq k$. Классом $U_{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\ldots,\mathcal{E}_s}$ называется совокупность всех функций из P_k, сохраняющих разбиение π. Как доказал Яблонский, все классы $U_{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\ldots,\mathcal{E}_s}$ при $1 < s < k$ предполны в P_k.

В трехзначном случае имеется три класса типа U [14]. Они соответствуют трем возможным разбиениям, отвечающим определению, приведенному выше. В цитируемой статье эти классы обозначаются как $U^3_{\mathcal{E}_{01},\mathcal{E}_2}$, $U^3_{\mathcal{E}_{02},\mathcal{E}_1}$, $U^3_{\mathcal{E}_{12},\mathcal{E}_0}$. Чтобы привести обозначения к принятым в настоящей работе, заменим их на U_1, $U_{1/2}$, U_0 соответственно. Для нас особый интерес представляет класс U_1, который определяется следующим образом: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U_1$, е.т.е. для всех $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leq n$ на всех наборах значений $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, где

$$b_m = \begin{cases} 1 \text{ , if } m = i_l \ (l = 1, 2, \ldots, s), \\ \neq 1 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ либо выдает значения исключительно из $\{0, 1/2\}$, либо всегда выдает значение 1. То есть, U_1 сохраняет разбиение π_1.

Очевидно, что класс функций, определяемый как

$$F_1 = \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) | \text{ Если } \{\langle a_1, a_1' \rangle, \langle a_2, a_2' \rangle, \ldots, \langle a_n, a_n' \rangle\} \subseteq \kappa_1, \text{то } \langle f(a_1, a_2, \ldots, a_n), f(a_1', a_2', \ldots, a_n') \rangle \in \kappa_1\}$$

также сохраняет разбиение π_1 и, как следствие, совпадает с U_1. Иными словами, U_1 есть в точности класс функций, классических относительно $D = \{1\}$.

Теперь построим трехзначную матрицу, которая содержит все функции, классические относительно $D = \{1\}$. Сперва рассмотрим ряд операций и покажем, что каждая из них удовлетворяет определению функции из U_1.

$f_\wedge$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	0	0	0

Допустим, что $s = 0$. Имеем четыре набора значений: $\langle 0, 0 \rangle$, $\langle 0, 1/2 \rangle$, $\langle 1/2, 0 \rangle$, $\langle 1/2, 1/2 \rangle$, и $f_\wedge(0, 0) = f_\wedge(0, 1/2) = f_\wedge(1/2, 0) = 0$, $f_\wedge(1/2, 1/2) = 1$.

Допустим, что $s = 1$. Для $i_1 = 1$ имеем $\langle 1, 0 \rangle$, $\langle 1, 1/2 \rangle$. Для $i_1 = 2$ имеем $\langle 0, 1 \rangle$, $\langle 1/2, 1 \rangle$. Далее, $f_\wedge(1, 0) = f_\wedge(0, 1) = 0$, $f_\wedge(1, 1/2) = f_\wedge(1/2, 1) = 1/2$.

Для $s = 2$ имеем один набор значений: $\langle 1, 1 \rangle$, и $f_\wedge(1, 1) = 1$.

$f_\vee$	1	$1/2$	0
1	1	1	1
$1/2$	1	$1/2$	$1/2$
0	1	$1/2$	0

Допустим, что $s = 0$. Имеем четыре набора значений: $\langle 0, 0\rangle$, $\langle 0, 1/2\rangle$, $\langle 1/2, 0\rangle$, $\langle 1/2, 1/2\rangle$, и $f_\vee(0, 0) = 0$, $f_\vee(0, 1/2) = f_\vee(1/2, 0) = f_\vee(1/2, 1/2) = 1/2$.

Допустим, что $s = 1$. Для $i_1 = 1$ имеем $\langle 1, 0\rangle$, $\langle 1, 1/2\rangle$. Для $i_1 = 2$ имеем $\langle 0, 1\rangle$, $\langle 1/2, 1\rangle$. Наконец, $f_\vee(1, 0) = f_\vee(1, 1/2) = f_\vee(1/2, 1) = f_\vee(0, 1) = 1$.

Для $s = 2$ имеем один набор значений: $\langle 1, 1\rangle$, и $f_\vee(1, 1) = 1$.

$f_\supset$	1	$1/2$	0
1	1	0	$1/2$
$1/2$	1	1	1
0	1	1	1

Допустим, что $s = 0$. Имеем четыре набора значений: $\langle 0, 0\rangle$, $\langle 0, 1/2\rangle$, $\langle 1/2, 0\rangle$, $\langle 1/2, 0\rangle$, и $f_\supset(0, 0) = f_\supset(0, 1/2) = f_\supset(1/2, 0) = f_\supset(1/2, 1/2) = 1$.

Допустим, что $s = 1$. Для $i_1 = 1$ имеем $\langle 1, 1/2\rangle$, $\langle 1, 0\rangle$. Для $i_1 = 2$ имеем $\langle 1/2, 1\rangle$, $\langle 0, 1/2\rangle$. И $f_\supset(1, 1/2) = 0$, $f_\supset(1, 0) = 1/2$, $f_\supset(1/2, 1) = f_\supset(0, 1) = 1$. Для $s = 2$ имеем один набор значений: $\langle 1, 1\rangle$, и $f_\supset(1, 1) = 1$.

x_1	$f_\neg(x_1)$
1	0
$1/2$	1
0	1

Для $s = 0$ имеем $f_\neg(0) = f_\neg(1/2) = 1$. Для $s = 1$ имеем $f_\neg(1) = 0$.

Теперь рассмотрим матрицу $M^1_{max} = \langle\{1, 1/2, 0\}, f_\wedge, f_\vee, f_\supset, f_\neg, \{1\}\rangle$ и матрицу $C^*_2 = \langle\{1, 0\}, \wedge^*, \vee^*, \supset^*, \neg^*, \{1\}\rangle$, которую мы уже определили раньше (с. 38).

Пропозициональный язык $L = \langle L, \wedge, \vee, \supset, \neg\rangle$ будем называть *стандартным*. Как M^1_{max}, так и C_2 являются матрицами для L. Кроме того, $[C_2] = P_2$. Легко проверить, что $\models_{M^1_{max}} = \models_{C_2}$. Таким образом, отношение следования, порождаемое M^1_{max} является классическим.

Лемма 2. *Класс $F^1_{max} = \{f_\wedge, f_\vee, f_\supset, f_\neg\}$ базовых операций M^1_{max} предполон в P_3.*

Иными словами,

$$\forall f(x_1, x_2, \ldots, x_n)(f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin [F^1_{max}], \text{е.т.е.} [F^1_{max} \cup \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}] = P_3),$$

где P_3 класс всех функций на $\{1, 1/2, 0\}$, и $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_3$.

Доказательство. Достаточно показать, что каждая функция, которая является классической относительно $D = \{2\}$, эквивалентна суперпозиции функций из F^1_{max}.

Следующие функции принадлежат $[F^1_{max}]$ (чтобы упростить нотацию, будем писать «§» вместо «$f_§$», где $§ \in \{\wedge, \vee, \supset, \neg\}$).

- $\blacktriangle(x) = (x \supset x) \supset x$;
- $I'_1(x) = \neg\neg x \wedge \blacktriangle\neg x$;
- $I'_{1/2}(x) = \blacktriangle((\neg x \wedge \blacktriangle x) \vee (\neg\neg x \wedge \blacktriangle\neg x))$;
- $I'_0(x) = \neg x \wedge \blacktriangle x$.

x	$\blacktriangle$	I'_1	$I'_{1/2}$	I'_0
1	1	1/2	0	0
1/2	0	0	1/2	0
0	1/2	0	0	1/2

Рассмотрим функцию

$$\mathop{\wedge}\limits_{i=1}^{n} I_{a_i}(x_i) = I_{a_1}(x_1) \wedge I_{a_2}(x_2) \wedge \cdots \wedge I_{a_n}(x_n),$$

где $I_{a_i}(x_i) = \neg\neg x_i$, если $a_i = 1$, и $I_{a_i}(x_i) = \neg x_i$, если $a_i \in \{0, 1/2\}$. Функция $\mathop{\wedge}\limits_{i=1}^{n} I_{a_i}(x_i)$ выдает значение 1, если $x_i = a_i = 2$, или $x_i \in \{0, 1/2\}$ и $a_i \in \{0, 1/2\}$, и выдает значение 0 в противном случае.

Далее, функция

$$\mathop{\vee}\limits_{i=1}^{n} I'_{a_i}(x_i) = I'_{a_1}(x_1) \vee I'_{a_2}(x_2) \vee \cdots \vee I'_{a_n}(x_n)$$

выдает значение $1/2$, если $x_i = a_i$ для каждого i, и значение 0 в противном случае.

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функция, классическая относительно $\{1\}$. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 2$, только когда $x_i = b_{j_i}$ $(1 \leq j \leq k)$ для наборов значений $(b_{1_1}, b_{1_2}, \ldots, b_{1_n})$, $(b_{2_1}, b_{2_2}, \ldots, b_{2_n})$, $\ldots$, $(b_{k_1}, b_{k_2}, \ldots, b_{k_n})$. Поскольку $f(b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_n}) = 1$, е.т.е. $f(b_{j_1^*}, b_{j_2^*}, \ldots, b_{j_n^*}) = 1$, где $b_{j_i^*} = 0$, если $b_{j_i} = 1/2$, и $b_{j_i^*} = b_{j_i}$ в противном случае,

$$\mathop{\vee}\limits_{j=1}^{k} (\mathop{\wedge}\limits_{i=1}^{n} I_{b_{j_i}}(x_i)) = (\mathop{\wedge}\limits_{i=1}^{n} I_{b_{1_i}}(x_i)) \vee (\mathop{\wedge}\limits_{i=1}^{n} I_{b_{2_i}}(x_i)) \vee \cdots \vee (\mathop{\wedge}\limits_{i=1}^{n} I_{b_{k_i}}(x_i))$$

есть функция, которая выдает значение 1, если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, и значение 0 в противном случае.

Допустим, что $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, только когда $x_i = c_{j'_i}$ $(1 \leq j' \leq m)$ для наборов $(c_{1_1}, c_{1_2}, \ldots, c_{1_n})$, $(c_{2_1}, c_{2_2}, \ldots, c_{2_n})$, $\ldots$, $(c_{m_1}, c_{m_2}, \ldots, c_{m_n})$. Тогда имеется функция

$$\mathop{\vee}\limits_{j'=1}^{m} (\mathop{\wedge}\limits_{i=1}^{n} I'_{c_{j'_i}}(x_i)) = (\mathop{\vee}\limits_{i=1}^{n} I'_{c_{1_i}}(x_i)) \vee (\mathop{\vee}\limits_{i=1}^{n} I'_{c_{2_i}}(x_i)) \vee \cdots \vee (\mathop{\vee}\limits_{i=1}^{n} I'_{c_{m_i}}(x_i)),$$

где $\mathop{\vee}\limits_{j'=1}^{m} (\mathop{\wedge}\limits_{i=1}^{n} I_{c_{j'_i}}(x_i))$ дает значение $1/2$ при $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, и значение 0 в противном случае.

Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = {}^1\!/\!_2$, то $\bigvee\limits_{j=1}^{k}(\bigwedge\limits_{i=1}^{n} I_{b_{j_i}}(x_i)) = 0$, поэтому имеет место следующее:

$$\bigvee_{j=1}^{k}(\bigwedge_{i=1}^{n} I_{b_{j_i}}(x_i)) \vee \bigvee_{j'=1}^{m}(\bigwedge_{i=1}^{n} I'_{c_{j'_i}}(x_i)) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Таким образом, каждая функция, классическая относительно $D = \{1\}$, эквивалентна суперпозиции функций из F^1_{max}. Поскольку класс функций, классических относительно $D = \{1\}$, совпадает с U_1, и U_1 есть предполный класс P_3, F^1_{max} предполон в P_3. □

Наше определение класса D выделенных значений предполагает следующие варианты его содержимого: $\{0, {}^1\!/\!_2\}$, $\{0, 1\}$, $\{{}^1\!/\!_2, 1\}$, $\{0\}$, $\{{}^1\!/\!_2\}$, $\{1\}$. Как и в случае, когда $D = \{1\}$, классы функций, являющихся классическими относительно других наборов выделенных значений ($[F_D]$) совпадают с одним из трех классов функций, сохраняющих нетривиальные отношения эквивалентности — U_1, $U_{1/2}$, U_0.

В уже процитированной цитируемой работе С.В. Яблонского также вводится понятие двойственности функций [14]. Пусть $s(x) \in P_k$ — такая функция от одной переменной, что на разных значениях аргумента она принимает разные значения. Функция

$$f^{s(x)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = s^{-1}(f(s(x_1), s(x_2), \ldots, s(x_n))),$$

где $s^{-1}(s(x)) = s(s^{-1}(x)) = x$, называется *двойственной* к функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ относительно $s(x)$.

Как отмечает Яблонский, из определения следует, что если $f^{s(x)}$ двойственна к f относительно $s(x)$, то f двойственна к $f^{s(x)}$ относительно $s^{-1}(x)$:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = s(f^{s(x)}(s^{-1}(x_1), s^{-1}(x_2), \ldots, s^{-1}(x_n))).$$

Поскольку $s^{-1}(s(x)) = s(s^{-1}(x)) = x$, имеет место:

- $s(f^{s(x)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = f(s(x_1), s(x_2), \ldots, s(x_n))$,
- $s^{-1}(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = f^{s(x)}(s^{-1}(x_1), s^{-1}(x_2), \ldots, s^{-1}(x_n))$.

Таким образом, $s(x)$ является изоморфизмом из $\mathcal{A}^{s(x)} = \langle V, F^{s(x)} \rangle$ на $\mathcal{A} = \langle V, F \rangle$ для каждого класса функций F на множестве V.

С.В. Яблонский отмечает наличие следующих отношений двойственности между классами типа U [14]:

- Класс U_0 двойственен классу U_1 относительно $\bar{\neg} x$,
- Класс $U_{1/2}$ двойственен классу U_1 относительно $\bar{\neg}\bar{\neg} x$.

Операции $\bar{\neg} x$ и $\bar{\neg}\bar{\neg} x$ определяются следующими таблицами:

x	$\bar{\neg} x$	$\bar{\neg}\bar{\neg} x$
1	$1/2$	0
$1/2$	0	1
0	1	$1/2$

Отметим, что $\bar{\neg} x$ совпадает с операцией отрицания в матрице для трехзначной логики Поста $\mathbf{P}_3$.

В силу того, что дуальность влечет изоморфизм, а U_0 и $U_{1/2}$ двойственны U_1, классы U_1, $U_{1/2}$ и U_0 попарно изоморфны. Поэтому все результаты, полученные для $D = \{1\}$ могут быть легко обобщены на прочие наборы выделенных значений. Отношения между классами выделенных значений и классами типа U таковы:

- $[F_{\{0,1/2\}}] = [F_{\{1\}}] = U_1$.
- $[F_{\{0,1\}}] = [F_{\{1/2\}}] = U_{1/2}$.
- $[F_{\{1/2,1\}}] = [F_{\{0\}}] = U_0$.

Как можно видеть, во всех трех случаях $[F_D] = U_D$ и $[F_{A\setminus D}] = U_D$. С точки зрения обычного понимания истинностных значений как степеней истинности, это может выглядеть контринтуитивным. Однако такой результат вполне гармонирует с замечанием Г. Малиновского о том, что мы можем выбрать $D = \{0\}$ в двузначной матрице [25, p. 30–31]. В таком случае получается, что существуют две классические двузначные логики — основанная на «истине» с $D = \{1\}$ и основанная на «лжи» с $D = \{0\}$.

Выше мы рассмотрели максимальные классы классических операций. Основным результатом данного раздела можно считать следующее. В двузначном случае максимальный (в заданном нами смысле) класс классических функций является единственным и совпадает с P_2. В трехзначном случае имеется три таких класса, и каждый из них предполон в P_3.

В частности, из этого вытекает, что расширяя класс операций максимальной трехзначной матрицы для классической логики, мы можем получить матрицу для логики Поста $\mathbf{P}_3$. В свою очередь, это значит, что $\mathbf{P}_3$ представима как расширение $\mathbf{C_2}$. Ясно, что $\mathbf{P}_3$ единственное расширение $\mathbf{C_2}$, которое можно построить с помощью максимальной матрицы для $\mathbf{C_2}$. Было бы интересно также рассмотреть и более слабые трехзначные матрицы для $\mathbf{C_2}$, которые позволяли бы представить больше логик в виде расширений классической логики. Этому вопросу посвящен следующий раздел.

1.6. Минимальные классы классических функций

В этом разделе мы рассмотрим трехзначные матрицы для стандартного языка, порождающие классическое отношение логического следования. Как мы показали выше, классы классических операций совпадают с классами U_1, $U_{1/2}$, U_0, которые попарно изоморфны. Таким образом, результаты для одного класса легко распространяются на остальные. Поэтому в данном разделе ограничимся рассмотрением матриц с классом выделенных значений $\{1\}$.

Напомним, что $\vDash_M = \vDash_{C_2}$ для некоторой трехзначной матрицы M и двузначной матрицы для классической пропозициональной логики C_2, е.т.е. существует матричный гомоморфизм из M на C_2. Поскольку класс всех функций C_2 полон в P_2, он содержит операции $\wedge^*$, $\vee^*$, $\supset^*$ и $\neg^*$, которые мы определили в самом начале главы (с. 38). Таким образом, если M порождает классическое отношение логического следования, то $[F]$ содержит гомоморфные прообразы $\wedge^*$, $\vee^*$, $\supset^*$ и $\neg^*$. Если же M и C_2 матрицы для стандартного языка, единственными связками которого являются $\wedge$, $\vee$, $\supset$ и $\neg$, то $\vDash_M = \vDash_{C_2}$, е.т.е. соответствующие операции M выполняют сформулированные Дж.Б. Россером и А.Р. Тюркеттом [31, p. 26] *стандартные условия* для конъюнкции, дизъюнкции, импликации и отрицания:

- $f_\wedge(a, b) \in D$, е.т.е. $a \in D$ и $b \in D$.
- $f_\vee(a, b) \notin D$, е.т.е. $a \notin D$ и $b \notin D$.
- $f_\supset(a, b) \notin D$, е.т.е. $a \in D$ и $b \notin D$.
- $f_\neg a \in D$, е.т.е. $a \notin D$.

Обратим внимание на взаимоотношение стандартных условий с понятием **C**-расширяющих операций, введенном В.К. Финном [7]. Оно состоит в том, что операции должны выдавать значения из $\{1, 0\}$ всегда, когда значения всех аргументов принадлежат $\{1, 0\}$[4]. Заметим, что в трехзначном случае данное определение совпадает с определением одного из предполных классов P_3 — класса T_{01} [14].

[4]Данное понятие также независимо вводится в работах других авторов. Н. Решер называет такое свойство «C-нормальностью» [16, p. 116], а С. Готтвальд — «нормальностью» [22, p. 31].

Как отмечает С. Готтвальд [22, p. 31], стандартность и **C**-расширение операций независимы друг от друга. Действительно, рассмотренные нами в третьем параграфе операции логики парадоксов Приста являются **C**-расширяющими, но не стандартными. В то же время, мы уже видели, что имеются классические (и следовательно, стандартные) операции, которые не удовлетворяют условию **C**-расширения. Например, $f_{\supset} \in F^1_{max}$ является классической импликацией с точки зрения используемого нами понятия классической функции. Однако $f_{\supset}(1,0) = 1/2$. На наш взгляд, представляет интерес тот факт, что, как оказывается, сохранение классических значений истинности не является необходимым свойством классических операций на $\{1, 1/2, 0\}$. Операция $f_{\supset} \in F^1_{max}$ также служит примером классической импликации, которая не является «естественной» [19, с. 31–32].

Таким образом, в силу условия стандартности, в интересующих нас матрицах с $D = \{1\}$ функции, которые соответствуют связкам $\wedge$, $\vee$, $\supset$ и $\neg$, имеют следующий вид ($A_i \in \{1/2, 0\}$, $A \in \{a, b, c, d\}$, $1 \leq i \leq 8$):

$f_\wedge$	1	1/2	0
1	1	a_1	a_2
1/2	a_3	a_4	a_5
0	a_6	a_7	a_8

$f_\vee$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	b_1	b_2
0	1	b_3	b_4

$f_\supset$	1	1/2	0
1	1	c_1	c_2
1/2	1	1	1
0	1	1	1

x	$f_\neg x$
1	d_1
1/2	1
0	1

Ясно, что всего существует $2^8 \times 2^4 \times 2^2 \times 2 = 2^{15}$ наборов операций вида $\{f_\wedge, f_\vee, f_\supset, f_\neg\}$. С помощью компьютерной проверки всех наборов вида $\{f_\wedge, f_\vee, f_\supset, f_\neg\}$ на функциональную эквивалентность друг другу, удалось установить, что число таких наборов, задающих попарно различные замкнутые классы функций равняется 443. Соответствующая программа написана П.Н. Труфановым.

Наиболее очевидным примером таблиц, отвечающих приведенным выше схемам, будут таблицы, где значение 0 занимает все клетки, в которых должны появиться невыделенные значения:

$\cap^{\Box}$	1	$1/2$	0
1	1	0	0
$1/2$	0	0	0
0	0	0	0

$\cup^{\Box}$	1	$1/2$	0
1	1	1	1
$1/2$	1	0	0
0	1	0	0

$\supset^{\Box}$	1	$1/2$	0
1	1	0	0
$1/2$	1	1	1
0	1	1	1

x	$\neg^{\Box}x$
1	0
$1/2$	1
0	1

Неудивительно, что данные операции являются исторически первым примером классических операций на $\{1, 1/2, 0\}$. Класс функций матрицы $B_3^{\Box} = \langle\{1, 1/2, 0\}, \cap^{\Box}, \cup^{\Box}, \supset^{\Box}, \neg^{\Box}, \{1\}\rangle$ есть собственное подмножество класса функций матрицы трехзначной логики Бочвара $\mathbf{B}_3$ [1]. Как показал Бочвар, исчисление $\mathbf{B_3^{\Box}}$, матрицей для которого является $B_3^{\Box}$, изоморфно исчислению $\mathbf{C_2}$.

Если трехзначная матрица $M = \langle\{0, 1/2, 1\}, F, D\rangle$ является матрицей для $\mathbf{C_2}$, и не существует такой матрицы $M' = \langle\{0, 1/2, 1\}, F', D\rangle$ для $\mathbf{C_2}$, что $[F'] \subset [F]$, будем называть матрицу M *минимальной матрицей для* $\mathbf{C_2}$.

Нетрудно убедиться, что матрица $B_3^{\Box}$ — это минимальная трехзначная матрица для $\mathbf{C_2}$. Для каждой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [\{\supset^{\Box}, \neg^{\Box}\}]$ верно, что

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, {}^1\!/_2, a_{i+1}, \ldots, a_n) = \\ f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

для каждых $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($a_j \in \{1, {}^1\!/_2, 0\}$). Таким образом, $[\{\supset^{\square}, \neg^{\square}\}]$ изоморфен P_2. В то же время, трехзначная матрица для классической логики должна содержать гомоморфный прообраз каждой функции из P_2. Таким образом, нельзя ослабить класс функций $B_3^{\square}$ таким образом, чтобы в результате получилась матрица, задающая классическое отношение следования.

Заметим, что $B_3^{\square}$ не является единственной минимальной трехзначной матрицей для $\mathbf{C_2}$. Рассмотрим матрицу $B_3^{\blacksquare} = \langle\{1, {}^1\!/_2, 0\}, \cap^{\blacksquare}, \cup^{\blacksquare}, \supset^{\blacksquare}, \neg^{\blacksquare}, \{1\}\rangle$, в которой функции задаются такими таблицами:

$\cap^{\blacksquare}$	1	1/2	0
1	1	1/2	1/2
1/2	1/2	1/2	1/2
0	1/2	1/2	1/2

$\cup^{\blacksquare}$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1/2	1/2

$\supset^{\blacksquare}$	1	1/2	0
1	1	1/2	1/2
1/2	1	1	1
0	1	1	1

x	$\neg^{\blacksquare} x$
1	1/2
1/2	1
0	1

Ясно, что $B_3^{\blacksquare}$ также является минимальной в указанном выше смысле, и класс всех ее функций изоморфен P_2. Однако между $B_3^{\square}$ и $B_3^{\blacksquare}$ все-таки есть важное различие. Операции $B_3^{\square}$ являются не только стандартными, но и $\mathbf{C}$-расширяющими. Очевидным образом, последнее не имеет места для $B_3^{\blacksquare}$.

В начале главы мы отмечали, что класс всех операций двузначной матрицы C_2 совпадает с P_2. В то же время, P_2 содержит счетное множество замкнутых классов функций [27, 15]. Поскольку множества всех функций $B_3^{\square}$ и $B_3^{\blacksquare}$ изоморфны P_2, они также содержат счетные множества замкнутых подклассов.

Здесь нам потребуется сделать отступление от общей темы раздела и остановиться на некоторых матрицах для $\mathbf{C_2}$, не являющихся минимальными. Дело в том, что существуют и трехзначные матрицы, порождающие классическое отношение логического следования, мощность множества замкнутых подклассов которых отлична от двузначного случая. Каждый из классов U_0, $U_{1/2}$ и U_1 содержит континуум замкнутых классов. Доказательства этого факта доступны в работах Я. Деметровича и Л. Ханнака [19, 20], а также в монографии Д. Лау [15, p. 228–229]. Таким образом, классы операций каждой из описанных в предыдущем разделе максимальных матриц для $\mathbf{C_2}$ содержат континуальное множество замкнутых подклассов. Более того, существуют и трехзначные матрицы для $\mathbf{C_2}$, которые не являются максимальными, но все равно содержат континуум замкнутых подклассов. Рассмотрим следующие операции:

$\dot{\wedge}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	0	0	0

$\dot{\vee}$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1/2	0

$\dot{\supset}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	0
0	1	1	1

x	$\dot{\neg}x$
1	0
1/2	0
0	1

М.Ф. Раца доказал ряд важных утверждений о взаимоотношениях классов $S = [\dot{\wedge}, \dot{\vee}, \dot{\supset}, \dot{\neg}]$ и U_0, а также класса $\mathbf{C}$-расширяющих операций T_{01} [10]:

1. $S = T_{01} \cap U_0$.

2. Класс S является предполным в классе T_{01}.

3. Класс S является предполным в классе U_0.

Из утверждения 3 вытекает, что матрица $G_3^2 = \langle\{0, 1/2, 1\}, \dot\wedge, \dot\vee, \dot\supset, \dot\neg, \{1/2, 1\}\rangle$ есть матрица для $\mathbf{C_2}$[5]. Из утверждения 2 вытекает, что данная матрица не является максимальной матрицей для $\mathbf{C_2}$. При этом, как доказал М.Ф. Раца в другой работе, класс функций S содержит континуум замкнутых подклассов [11].

Аналогичная матрица существует и для $D = \{1\}$. А.С. Карпенко была построена матрица с базовыми операциями, двойственными операциям из S относительно $\sim x = 1 - x$ [8, с. 49]. Таблицы для этих операций имеют следующий вид:

$\dot\wedge$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	0	0	0

$\dot\vee$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1/2	0

$\ddot\supset$	1	1/2	0
1	0	0	0
1/2	1	0	0
0	1	1/2	0

x	$\ddot\neg x$
1	0
1/2	1
0	1

По аналогии с S, будем обозначать $[\dot\wedge, \dot\vee, \ddot\supset, \ddot\neg]$ как S^*. Как можно заметить, все операции класса S^* содержатся в классах U_1 и T_{01}. Таким образом, матрица $G_3^1 = \langle\{1, 1/2, 0\}, \dot\wedge, \dot\vee, \ddot\supset, \ddot\neg, \{1\}\rangle$ — это матрица для $\mathbf{C_2}$, не являющаяся максимальной. В то же

[5] На этот факт также указывает Р.Л. Эпштейн [21, p. 256–257]. Если же мы заменим класс выделенных значений на $\{1\}$, то получится матрица для трехзначной логики Гейтинга $\mathbf{G_3}$.

время, классы S и S^* двойственны относительно $\sim$. Как мы уже отмечали, согласно определению С.В. Яблонского, двойственность влечет изоморфизм. А это значит, что множество замкнутых подклассов S^* континуально. Как и G_3^2, матрица G_3^1 не является максимальной. В то же время, классы операций G_3^1 и G_3^2 предполны в классе T_{01} (см. [10] и [9]). Это значит, что эти матрицы содержат все **C**-расширяющие операции, являющиеся классическими относительно соответствующих классов выделенных значений.

Теперь вернемся к рассмотрению $B_3^{\Box}$. Еще одна причина, по которой эта матрица заслуживает отдельного внимания состоит в следующем. Базовые операции $C_2^* = \langle\{0,1\}, \wedge^*, \vee^*, \supset^*, \neg^*, \{1\}\rangle$ однозначным образом задают класс классических функций на $\{1,0\}$ — он совпадает с P_2. В то же время, на примере M_{max}^1 и $B_3^{\Box}$ мы видим, что в трехзначном случае существует множество классов классических функций, упорядоченных по отношению включения. Можно было бы предположить, что, как и в двузначном случае, каждый из таких классов однозначным образом определяется набором функций на $\{1, {}^1\!/_2, 0\}$, имеющим вид $\{f_\wedge, f_\vee, f_\supset, f_\neg\}$. Однако на примере $B_3^{\Box}$ можно показать, что такое допущение неверно.

Для этого нам потребуются определения еще нескольких предполных классов P_3, кроме уже рассмотренных классов типа U и класса **C**-расширяющих операций T_{01}.

- Класс B (класс Слупецкого) состоит из функций, либо существенно зависящих только от одной переменной, либо принимающих не более двух значений.

- Классы C_a ($a \in \{1, {}^1\!/_2, 0\}$) есть классы функций, сохраняющих константу a. То есть, для каждой функции из этого класса имеет место: $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = a$, если $x_i = a$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Базовые операции $B_3^{\Box}$ являются единственным набором стандартных функций вида $\{f_\wedge, f_\vee, f_\supset, f_\neg\}$, содержащемся в классах $U_1 \cap B \cap C_0$, $U_1 \cap B \cap U_{1/2}$, $U_1 \cap B \cap T_{01}$, $U_1 \cap B \cap C_0 \cap C_1$, $U_1 \cap B \cap T_{01} \cap C_1$. В то же время, как мы покажем ниже, данные классы не являются эквивалентными.

С.В. Яблонским [14] предложена таблица, в которой указывается принадлежность к тем или иным предполным классам всех 27 одноместных операций на трехэлементном множестве. Рассмотрим те из них, которые входят в U_1 (сохраняя оригинальные обозначения Яблонского).

s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_{10}	s_{11}	s_{12}	s_{13}
0	$1/2$	1	0	$1/2$	1	0	$1/2$	1	0
0	0	0	$1/2$	$1/2$	$1/2$	0	0	0	$1/2$
0	0	0	0	0	0	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$

s_{14}	s_{15}	s_{25}	s_{26}	s_{27}
$1/2$	1	0	$1/2$	1
$1/2$	$1/2$	1	1	1
$1/2$	$1/2$	1	1	1

Распределение этих унарных операторов по приведенным выше пересечениям предполных классов выглядит следующим образом:

- $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_{10}, s_{11}, s_{13}, s_{14}, s_{25}, s_{27}\} \subseteq U_1 \cap B \cap C_0$.
- $\{s_1, s_3, s_4, s_6, s_{11}, s_{14}, s_{25}, s_{27}\} \subseteq U_1 \cap B \cap U_{1/2}$.
- $\{s_1, s_3, s_4, s_6, s_{25}, s_{27}\} \subseteq U_1 \cap B \cap T_{01}$.
- $\{s_1, s_3, s_6, s_{14}, s_{25}, s_{27}\} \subseteq U_1 \cap B \cap C_0 \cap C_2$.
- $\{s_1, s_3, s_6, s_{25}, s_{27}\} \subseteq U_1 \cap B \cap T_{01} \cap C_1$.

Итак, мы видим, что класс всех функций $B_3^{\Box}$ имеет целый ряд расширений, которые не приводят к появлению новых стандартных функций для конъюнкции, дизъюнкции, импликации или отрицания. А это означает, что упомянутое нами в начале параграфа множество попарно различных классов вида $\{f_\wedge, f_\vee, f_\supset, f_\neg\}$, которое равняется 443, не исчерпывает множество всех гомоморфных прообразов P_2 в U_1. Таким образом, вопрос о числе трехзначных матриц, порождающих классическое отношение следования, остается открытым.

Литература

[1] *Бочвар Д.А.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. 1938. Т. 4. № 2. С. 287–308.

[2] *Девяткин Л.Ю.* Трехзначные изоморфы классической пропозициональной логики // Логические исследования. 2004. Вып. 11. С. 119–125.

[3] *Девяткин Л.Ю.* К вопросу о трехэлементных характеристических матрицах для классической логики высказываний // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. М.: ИФРАН, 2007. С. 43–49.

[4] *Девяткин Л.Ю.* N-значные матрицы для классической логики высказываний // Логические исследования. 2009. Вып. 15. С. 94–105.

[5] *Девяткин Л.Ю.* О некоторых функциональных свойствах трехзначных матриц для классической логики // Логические исследования. 2011. Вып. 17. С. 109–120.

[6] *Девяткин Л.Ю.* Трехзначные семантики для классической логики высказываний. М.: ИФРАН, 2011. 108 с.

[7] *Девяткин Л.Ю., Карпенко А.С., Попов В.М.* Трехзначные характеристические матрицы классической пропозициональной логики // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. 2007. С. 50–62.

[8] *Карпенко А.С.* Развитие многозначной логики. М.: ЛКИ, 2010. 448 с.

[9] *Преловский Н.Н.* О двух предполных классах трехзначной логики Лукасевича // Логические исследования. 2012. Вып. 18. С. 197–210.

[10] *Раца М.Ф.* О классе функций трехзначной логики, соответствующем первой матрице Яськовского // Проблемы кибернетики. 1969. Вып. 21. С. 185–214.

[11] *Раца М.Ф.* Итеративные цепные классы псевдобулевых функций. Кишинёв. 1990. 236 с.

[12] *Томова Н.Е.* Естественные трехзначные логики: функциональные свойства и отношения. М.: ИФРАН. 2012. 89 с.

[13] *Финн В.К.* О предполноте класса функций, соответствующего трехзначной логике Я. Лукасевича // Научно-техническая информация. М. 1969. Сер. 2. Вып. 10. С. 35–38.

[14] *Яблонский С.В.*, Функциональные построения в k-значной логике // Труды математического института им. В.А. Стеклова. М., 1958. Т. 51. С. 5–142.

[15] *Яблонский С.В.*, *Гаврилов Г.П.*, *Кудрявцев В.Б.* Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука. 1966. 120 с.

[16] *Arieli O.*, *Avron A.*, *Zamansky A.* Maximally Paraconsistent Three-Valued Logics // Proceedings of the Twelfth International Conference on the Principles of Knowledge Representation and Reasoning. 2010. P. 310–318.

[17] *Arieli O.*, *Avron A.*, *Zamansky A.* Maximal and premaximal paraconsistency in the framework of three-valued semantics // Studia Logica. Vol. 97(1). 2011. P. 31–60.

[18] *Avron A.* Natural 3-valued logics — characterization and proof theory // The Journal of Symbolic Logic. Vol. 56(1). 1991. P. 276–294.

[19] *Demetrovics J., Hannak L.* The cardinality of closed sets in precomplete classes in k-valued logic // Acta Cybernetica. 1980. Vol. 4. P. 273–277.

[20] *Demetrovics J., Hannak L.* The number of reducts of a preprimal algebra // Algebra Universalis. 1983. Vol. 16(1). P. 178–185.

[21] *Epstein R.L* The Semantic Foundations of Logic. Vol. 1: Propositional logic. Dordrecht: Kluwer. 1990. 388 p.

[22] *Gottwald S.* A Treatise on Many-Valued Logics. Baldock: Research Studies Press. 2001. 600 p.

[23] *Jaśkowski S.* A propositional calculus for inconsistent deductive systems // Logic and Logical Philosophy. 2004. Vol. 7. P. 35–56.

[24] *Lau D.* Function Algebras on Finite Sets: Basic Course on Many-Valued Logic and Clone Theory. Springer Science & Business Media. 2006. 670 p.

[25] *Malinowski G.* Many-Valued Logics. Oxford University Press. 1993. 144 p.

[26] *Martin J.N.* A syntactic characterization of Kleene's strong connectives with two designated values // Mathematical Logic Quarterly. 1975. Vol. 21. P. 181–184.

[27] *Post E.L.* The Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic. Annals of Mathematical studies. Vol. 5. Princeton University Press. 1941. 122 p.

[28] *Priest G.* Logic of paradox // Journal of Philosophical Logic. 1979. Vol. 8. P. 219–241.

[29] *Pynko A.P.* On Priest's logic of paradox // Journal of Applied Non-Classical Logics. 1995. Vol. 5(2). P. 219–225.

[30] *Rescher N.* Many-Valued Logic. New York: McGraw-Hill, 1969. Reprinted: Aldershot: Gregg Revivals, 1993. 349 p.

[31] *Rosser J.B.*, *Turquette A.R.* Many-Valued Logics. Amsterdam: North-Holland. 1952. 124 p.

[32] *Słupecki J.*, *Bryll G.*, *Prucnal T.* Some remarks on three-valued logic of J. Łukasiewicz // Studia Logica. 1967. Vol. 21(1). P. 45–66.

[33] *Suszko R.* Formalna teoria wartości logicznych I // Studia Logica. 1957. Vol. 6(1). P. 145–320.

[34] *Wójcicki R. Lectures on Propositional Calculi.* Wroclaw: Ossolineum, 1984. 292 p.

[35] *Wójcicki R. Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations.* Dordrecht: Kluwer. 1988. 474 p.

ГЛАВА 2.

КОНТИНУАЛЬНОСТЬ НЕКОТОРЫХ СЛАБЫХ ТРЕХЗНАЧНЫХ ЛОГИК И ПРОБЛЕМА МОЩНОСТИ МНОЖЕСТВ ПРЕДПОЛНЫХ КЛАССОВ

2.1. Введение

Данная глава посвящена отдельным вопросам, связанным с мощностью множеств функциональных классов, содержащихся в замкнутых классах, соответствующих различным трехзначным логикам. Эта проблематика напрямую связана с такими хорошо освещенными в отечественной и зарубежной литературе вопросами, как критерии функциональной полноты и описание множеств предполных классов различных функциональных классов. Отметим вначале наиболее значимые этапы соответствующих исследований.

В работе С.В. Яблонского [12] содержится описание восемнадцати предполных классов трехзначной логики Поста P_3, что позволяет сформулировать необходимое и достаточное условие полноты в этой системе. М.Ф. Раца в [7] описал десять предполных классов трехзначной логики Гейтинга G_3 — $S_0, \ldots, S_9$. В.К. Финн в [10] дал описание одиннадцати предполных классов трехзначной логики Бочвара B_3. Работы Раца и Финна также позволяют сформулировать необходимые и достаточные условия полноты замкнутого класса функций в G_3 и B_3.

А.А. Родин в [9] рассмотрел предполные классы, содержащие все ограниченно-детерминированные функции, в каждом состоянии которых реализуется функция из некоторого замкнутого класса D k-значной логики. Им было показано, что мощность множества таких предполных классов равна континууму для любого замкнутого $D \neq P_k$.

Именно описание предполных классов стимулировало исследования в области мощности множеств замкнутых классов некоторых трехзначных логик, а также поставило вопрос о мощности множества самих предполных классов. В известной автору данной главы литературе отсутствуют доказательства существования содержащихся в P_k замкнутых функциональных классов, имеющих бесконечное множество предполных классов, а также не имеющих предполных классов. Ответу на вопрос о существовании таких классов посвящен последний раздел этой главы.

2.2. Базовые определения

Сделаем предварительно несколько замечаний, касающихся используемой нотации, а также дадим определения основных понятий, встречающихся в настоящей работе.

В качестве переменных для аргументов функций используются латинские буквы x, y, z, возможно, с индексами. Для обозначения значений переменных используются буквы a, b и c также, возможно, с индексами. Запись функций осуществляется с использованием известного понятия формулы логики высказываний [7]. Аргументы функций, как и сами функции, принимают значения из множества $\{1, 1/2, 0\}$. Значение $1/2$ будем называть промежуточным. В рассмотрении используются понятия операции суперпозиции, замыкания системы функций относительно операции суперпозиции, замкнутого класса, функционально полного и предполного классов, а также понятие базиса.

Дадим вначале определение операции суперпозиции.

Определение 1. Если имеется система функций

$$\{f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_r(x_1,\ldots,x_n)\}\,,$$

то суперпозицией функций данной системы называется либо функция полученная из уже имеющихся функций путем замены переменных, либо если установлено, что функции $f_j^i(x_{1_{ij}},\ldots,x_{n_{ij}}),\ldots,f_m^k(x_{1_{km}},\ldots,x_{n_{km}})$, а также функция $f_t^s(x_{j_{st}},\ldots,x_{m_{st}})$ являются суперпозициями исходной системы, то и функция

$$f_t^s(f_j^i(x_{1_{ij}},\ldots,x_{n_{ij}}),\ldots,f_m^k(x_{1_{km}},\ldots,x_{n_{km}}))$$

также является суперпозицией функций данной системы.

Говоря неформально, речь идет о всевозможных подстановках вместо аргументов исходной системы функций. Буквы F и G будем в дальнейшем использовать для обозначения произвольных систем и классов функций.

В [12], [13] содержится определение замыкания и замкнутого класса функций.

Определение 2. Множество $[F]$ называется замыканием системы (класса) функций F, если оно содержит все суперпозиции функций над классом F и не содержит никаких других функций.

Оператор замыкания $[\ldots]$ удовлетворяет следующим четырем условиям:

- $F \subseteq [F]$
- $[[F]] = [F]$
- $F \subseteq G \Rightarrow [F] \subseteq [G]$
- Множество функций F замкнуто, если $F = [F]$

Определение 3. Систему функций называем базисом данного класса функций, если она эквивалентна этому классу, но никакая ее собственная подсистема не эквивалентна ему. Система функций G, эквивалентная классу F, называется (функционально) полной в этом классе, то есть: G (функционально) полна в $F \Leftrightarrow_{def} [G] = F$.

Определение 4. Система функций G, функционально полная в классе $F = P_k$, где P_k есть k-значная логика Поста, называется функционально полной (см. [1, с. 88–91]).

Самым важным для дальнейшего рассмотрения является следующее понятие *предполного в F класса*:

Определение 5. Если G и F — замкнутые классы функций и $G \subset F$, но $F \not\subset G$, то G называется предполным в F, если и только если замыкание объединения класса G и функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ такой, что $f(x_1, \ldots, x_n) \in F$ и $f(x_1, \ldots, x_n) \notin G$, совпадает с F, то есть: G предполон в

$$F \Leftrightarrow_{def} f(x_1, \ldots, x_n) \in F \& f(x_1, \ldots, x_n) \notin G \Rightarrow \\ [G \cup f(x_1, \ldots, x_n)] = F,$$

где $[G \cup f(x_1, \ldots, x_n)]$ есть замыкание теоретико-множественного объединения.

Замечание 1. Множество функций k-значной логики Поста P_k, где $k \in \{2, 3, \ldots\}$, есть множество $\{f(x_1, \ldots, x_n) : \{0, 1, \ldots, k-1\}^n \mapsto \{0, 1, \ldots, k-1\}\}$, где $\{0, 1, \ldots, k-1\}^n$ есть декартова n-ая степень множества $\{0, 1, \ldots, k - 1\}$. В частности, множество функций P_3 содержит все функции, аргументы которых, как и сами функции, принимают значения из множества $\{0, 1, 2\}$. В настоящей работе приняты иные обозначения для элементов множества значений функций и их аргументов: значение 0 остается без изменений; вместо значения 1, пишем $1/2$; вместо значения 2, используем 1.

2.3. Континуальность множества замкнутых классов B_3

В 1959 году Ю.И. Янов и А.А. Мучник в работе [5] впервые показали, что множество функций k-значной логики Поста P_k при $k \geq 3$ содержит замкнутый класс, не имеющий базиса, а также континуум различных замкнутых классов. М.Ф. Раца в [6] и [8] показал, что трехзначная логика Гейтинга G_3 содержит континуум различных замкнутых классов со счетными базисами и континуум различных замкнутых классов, не имеющих базиса. Впоследствии мощность множеств замкнутых классов, содержащихся в различных многозначных логиках, исследовалась в фундаментальной монографии Д. Лау [15], посвященной функциональным алгебрам на конечных множествах.

А.С. Карпенко в статье [3] высказывает гипотезу о континуальности множества замкнутых классов, содержащихся в трехзначной логике Бочвара B_3 (табличные определения исходных функций этой логики будут даны ниже). В качестве аргумента в подкрепление данной гипотезы автор ссылается на приводящийся в [15, p. 221–222] критерий счетности множества замкнутых классов, содержащихся в некотором классе. А.С. Карпенко установил, что логика B_3 не удовлетворяет данному критерию. Однако этот результат дает лишь необходимое, но не достаточное условие для континуальности B_3. Поэтому, несмотря на данный аргумент, мы не можем сделать вывод о несчетности множества классов, содержащихся в B_3.

С другой стороны, была высказана гипотеза о том, что множество замкнутых классов B_3 имеет счетную мощность. Это может быть подкреплено тем, что множество функций B_3 порождается множествами внутренних связок $B_3^{in} = [\{\sim, \cap\}]$ и внешних связок B_3^{ex}, областью значений которых является множество $\{0, 1\}$. Мощность множества замкнутых классов как в B_3^{in}, так и в B_3^{ex} является счетной, а в объединении эти два множества порождают множество всех функций B_3.

Данная аргументация представляется сомнительной в силу того, что для любых двух систем F и G функций $f_1, \ldots, f_n$ и $g_1, \ldots, g_m$, соответственно, в общем случае имеет место неравенство классов $[F] \cup [G]$ и $[F \cup G]$, а именно: $[F] \cup [G] \subseteq [F \cup G]$. Из чего следует, что:

$$|\{\mathfrak{K} : (\mathfrak{K} \subseteq ([F] \cup [G]))\&(\mathfrak{K} = [\mathfrak{K}])\}| \leq |\{\mathfrak{K}' : (\mathfrak{K}' \subseteq [F \cup G])\&(\mathfrak{K}' = [\mathfrak{K}'])\}|.$$

В частности, представляется вполне возможным, чтобы выполнялось $|\{\mathfrak{K} : (\mathfrak{K} \subseteq [F])\&(\mathfrak{K} = [\mathfrak{K}])\}| = |\{\mathfrak{K}' : (\mathfrak{K}' \subseteq [G])\&(\mathfrak{K}' = [\mathfrak{K}'])\}| = |\{\mathfrak{K}'' : (\mathfrak{K}'' \subseteq ([F] \cup [G]))\&(\mathfrak{K}'' = [\mathfrak{K}''])\}| = \aleph_0$, и одновременно с этим $|\{\mathfrak{K} : (\mathfrak{K} \subseteq [F \cup G])\&(\mathfrak{K} = [\mathfrak{K}])\}| = \mathfrak{c}$.

Таким образом, вопрос о мощности множества замкнутых классов, содержащихся в логике B_3, до сих пор оставался открытым. Также не было известно, имеются ли функционально вложимые в B_3 (то есть более слабые по своим функциональным свойствам) логики, мощность множества замкнутых классов которых является континуальной. В данной работе, которая является расширением [16], дается утвердительный ответ на этот вопрос, который, в свою очередь, может считаться и ответом на вопрос о мощности множества замкнутых классов, содержащихся в B_3. В частности, поскольку трехзначная логика Холдена H_3, впервые рассмотренная в [14], содержит (как показывается ниже) континуум различных замкнутых классов и класс функций логики H_3 является предполным в B_3, как это показано В.К. Финном в [10], то континуально и множество замкнутых классов B_3.

Сформулируем ряд соответствующих теорем и приведем их доказательства. Стратегия доказательств будет с незначительными изменениями заимствована из работы Ю.И. Янова и А.А. Мучника [5].

В дальнейшем мы будем пользоваться исходными функциями логики B_3, которые задаются при помощи следующих истинностных таблиц:

$\cap$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
0	0	$1/2$	0

$\cup$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	1
$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
0	1	$1/2$	0

$\sim$	x
0	1
$1/2$	$1/2$
1	0

$\vdash$	x
1	1
0	$1/2$
0	0

Теорема 1. *В множестве замкнутых классов, содержащихся в классе функций, соответствующих логике B_3, имеется класс, не имеющий базиса.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $S = f_0, f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \dots$ функций $f_i(x_1, \dots, x_i)$, принадлежащих трехзначной логике Поста P_3, для $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$, которые удовлетворяют следующему определению: $f_0 \equiv 0$;

$$f_i(x_1, \dots, x_i) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_1 = \dots = x_i = 1/2; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Покажем, что все функции $f_i(x_1, \dots, x_i)$ принадлежат B_3. Для этого достаточно отметить, что константа 0 принадлежит множеству функций данной логики и может быть выражена при помощи, например, формулы $\vdash x \cap \sim\vdash x$, а также выразить функции $f_i(x_1, \dots, x_i)$ при всех $i > 0$ через формулы: $\sim\vdash x_1 \cap \sim\vdash\sim x_1 \cap \dots \cap \sim\vdash x_i \cap \sim\vdash\sim x_i$.

Отметим также, что формула $\sim\vdash x \cap \sim\vdash\sim x$ представляет собой оператор Россера–Тюркетта (J-оператор) для значения $1/2$ в B_3[1]. Поэтому выражение для функций $f_i(x_1, \dots, x_i)$ может быть сокращенно переписано с использованием J-оператора для $1/2$ в следующем виде: $J_{1/2}(x_1) \cap \dots \cap J_{1/2}(x_i)$.

Обозначим через $\mathfrak{M}(S)$ класс, порожденный множеством функций $\{f_0, f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \dots\} \subset B_3$ путем переименования переменных без их отождествления. Данный класс является замкнутым. Допустим, что $\mathfrak{M}(S)$ имеет базис. Тогда

[1]Операторы Россера–Тюркетта $J_1(x) =\vdash x$, $J_{1/2}(x) =\sim\vdash x \cap \sim\vdash\sim x$ и $J_0(x) =\vdash\sim x$ для логики B_3 были впервые построены В.К. Финном в [11].

в базисе найдется функция f', получающаяся из функции $f_{n_0}(x_1, \dots, x_{n_0})$ путем переименования переменных, для которой число n_0 минимально. Далее возможны два случая.

1. Базис содержит хотя бы еще одну функцию f''. Этой функции соответствует функция $f_{n_1}(x_1, \dots, x_{n_1})$, что $n_1 > n_0$. Поскольку $f_{n_0}(x_1, \dots, x_{n_0})$ может быть получена из $f_{n_1}(x_1, \dots, x_{n_1})$ путем отождествления переменных, то f' выражается через f'', что противоречит определению базиса.

2. Базис состоит из единственной функции f'. В этом случае никакая функция f_n при $n > n_0$ не может быть получена из f', так как $f_{n_0}(\dots, f_{n_0}, \dots) \equiv 0$, что вновь приводит к противоречию. $\square$

Теорема 2. *Класс функций логики B_3 содержит замкнутый класс, имеющий счетный базис.*

Доказательство. Для доказательства утверждения теоремы рассмотрим последовательность $S = f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2, x_3), \dots$ функций $f_i(x_1, \dots, x_i)$, принадлежащих трехзначной логике Поста P_3, для $i \in \{2, 3, \dots\}$, которые удовлетворяют следующему определению:

$$f_i(x_1, \dots, x_i) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_1 = \dots = x_{j-1} = x_{j+1} = \dots = x_i = 1/2, \\ & x_j = 1 \ (1 \le j \le i); \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Покажем, что такие функции определимы посредством исходных функций B_3 для каждого i. Для этого рассмотрим для всякого x_j $(1 \le j \le i)$ и всякого i следующие формулы B_3:

$F_j = \vdash x_j \cap (\sim\vdash x_1 \cap \sim\vdash\sim x_1) \cap \dots \cap (\sim\vdash x_{j-1} \cap \sim\vdash\sim x_{j-1}) \cap (\sim\vdash x_{j+1} \cap \sim\vdash\sim x_{j+1}) \cap \dots \cap (\sim\vdash x_i \cap \sim\vdash\sim x_i)$.

Тогда посредством F для всякого i обозначим результат объединения всех формул F_j при помощи связки внутренней дизъюнкции: $F = \bigcup_1^i F_j$.

Формула F задает искомую функцию $f_i(x_1, \dots, x_i)$ из B_3. Так, например, для $i = 2$ имеется всего две формулы F_j, а именно: $F_1 = \vdash x_1 \cap (\sim\vdash x_2 \cap \sim\vdash\sim x_2)$ и $F_2 = \vdash x_2 \cap (\sim\vdash x_1 \cap \sim\vdash\sim x_1)$. Тогда формула $F = F_1 \cup F_2$ примет вид:

$(\vdash x_1 \cap (\sim\vdash x_2 \cap \sim\vdash\sim x_2)) \cup (\vdash x_2 \cap (\sim\vdash x_1 \cap \sim\vdash\sim x_1))$.

Легко убедиться, что соответствующая данной формуле функция $f_2(x_1, x_2) \in B_3$ принимает значение 1 только на двух наборах значений переменных x_1 и x_2, а именно: $\langle 1, {}^1\!/_2 \rangle$ и $\langle {}^1\!/_2, 1 \rangle$. На всех остальных наборах значений переменных данная функция принимает значение 0.

Итак, установлено, что для всякого i функции $f_i(x_1, \dots, x_i)$ принадлежат B_3.

Отметим также, что формулы F_j и F могут быть записаны в упрощенном виде с использованием J-операторов для значений 1 и ${}^1\!/_2$: $F'_j = J_1(x_j) \cap J_{1/2}(x_1) \cap \dots \cap J_{1/2}(x_{j-1}) \cap J_{1/2}(x_{j+1}) \cap \dots \cap J_{1/2}(x_i)$.

Формула F в этом случае переписывается как результат объединения всех формул F'_j при помощи связки внутренней дизъюнкции: $F' = \bigcup_1^i F'_j$.

Обозначим через $\mathfrak{M}(S)$ замкнутый класс, порожденный системой определенных выше функций $\{f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2, x_3), \dots\}$. Покажем, что эта система является базисом $\mathfrak{M}(S)$. Для этого достаточно доказать, что ни одна из функций $f_m(x_1, \dots, x_m)$ не может быть представлена в виде формулы с использованием только функций из $\{f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2, x_3), \dots\} \setminus \{f_m(x_1, \dots, x_m)\}$, то есть что невозможно представление: $f_m(x_1, \dots, x_m) = \mathfrak{A}[f_2, \dots, f_{m-1}, f_{m+1}, \dots]$. Формула $\mathfrak{A}[f_2, \dots, f_{m-1}, f_{m+1}, \dots]$ может быть записана несколько подробнее. В этом случае получим:

$$\mathfrak{A}[f_2, \dots, f_{m-1}, f_{m+1}, \dots] =$$
$$f_r(\mathfrak{B}_1[f_2, \dots, f_{m-1}, f_{m+1}, \dots], \dots, \mathfrak{B}_r[f_2, \dots, f_{m-1}, f_{m+1}, \dots]).$$

Или с использованием первого равенства:

$$f_m(x_1, \dots, x_m) = \\ f_r(\mathfrak{B}_1[f_2, \dots, f_{m-1}, f_{m+1}, \dots], \dots, \mathfrak{B}_r[f_2, \dots, f_{m-1}, f_{m+1}, \dots]).$$

Рассмотрим три возможных случая:

1. Среди формул

$$\mathfrak{B}_1[f_2, \dots, f_{m-1}, f_{m+1}, \dots], \dots, \mathfrak{B}_r[f_2, \dots, f_{m-1}, f_{m+1}, \dots],$$

где $r \geq 2$, по крайней мере две формулы отличны от символов переменных. В этом случае для всякого набора значений $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ переменных $x_1, \dots, x_m$ на соответствующих аргументных местах в функции $f_r(\mathfrak{B}_1[f_2, \dots, f_{m-1}, f_{m+1}, \dots], \dots, \mathfrak{B}_r[f_2, \dots, f_{m-1}, f_{m+1}, \dots])$ будут находиться значения 1 либо 0, а вся данная функция в соответствии с определением будет тождественно равна 0, что противоречит допущению об определимости $f_m(x_1, \dots, x_m)$ только через функции, содержащиеся в множестве $\{f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2, x_3), \dots\} \backslash \{f_m(x_1, \dots, x_m)\}$, поскольку ни одна из функций в множестве $\{f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2, x_3), \dots\}$ не является тождественно равной нулю.

2. Среди формул

$$\mathfrak{B}_1[f_2, \dots, f_{m-1}, f_{m+1}, \dots], \dots, \mathfrak{B}_r[f_2, \dots, f_{m-1}, f_{m+1}, \dots]$$

имеется единственная формула $\mathfrak{B}_s$, которая отлична от символа переменной. По условию данного случая, функции, соответствующие остальным формулам, сводятся к переменным, и поскольку $r \geq 2$, то найдется по крайней мере одна формула $\mathfrak{B}_p \equiv x_q$. Рассмотрим набор $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ значений переменных $x_1, \dots, x_m$, что $a_1 = \dots = a_{q-1} = a_{q+1} = \dots = a_m = 1/2$ и $a_q = 1$. На этом наборе соответствующая формуле $\mathfrak{B}_s$ функция принимает значение 1 либо 0. Значит, на наборе $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ значений переменных $x_1, \dots, x_m$ в функции $f_r(\mathfrak{B}_1[f_2, \dots, f_{m-1}, f_{m+1}, \dots], \dots, \mathfrak{B}_r[f_2, \dots, f_{m-1}, f_{m+1}, \dots])$ по крайней мере на двух аргументных местах будут стоять значения, отличные от $1/2$. Поэтому правая часть равенства обратится в 0, а левая его часть должна быть равна единице 1, по определению функции $f_m(x_1, \dots, x_m)$, что невозможно.

3. Все формулы

$$\mathfrak{B}_1[f_2, \dots, f_{m-1}, f_{m+1}, \dots], \dots, \mathfrak{B}_r[f_2, \dots, f_{m-1}, f_{m+1}, \dots]$$

эквивалентны символам переменных. Тогда $r > m$, и в выражающей функцию $f_m(x_1, \dots, x_m)$ формуле встретятся по крайней мере два вхождения некоторой переменной x_p. Рассмотрев набор $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ значений переменных $x_1, \dots, x_m$, что $a_1 = \dots = a_{p-1} = a_{p+1} = \dots = a_m = 1/2$ и $a_p = 1$, мы вновь обратим правую часть соответствующего равенства в 0, а его левую часть в 1, что невозможно.

Во всех трех рассмотренных выше случаях получаем противоречия. Следовательно, ни одна из функций $f_m(x_1, \dots, x_m)$, где $m \geq 2$, не может быть представлена в виде формулы с использованием только функций из $\{f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2, x_3), \dots\} \setminus \{f_m(x_1, \dots, x_m)\}$. □

Данная теорема позволяет нам доказать один из основных результатов этой работы о континуальности множества замкнутых классов, содержащихся в B_3. Рассуждения в доказательстве этого факта полностью совпадают со стратегией, использовавшейся Ю.И. Яновым и А.А. Мучником для доказательства континуальности множества замкнутых классов, содержащихся в k-значной логике Поста P_k для всех $k \geq 3$.

Теорема 3. *В классе функций логики B_3 содержится континуум различных замкнутых классов.*

Доказательство. Число замкнутых классов в B_3 сверху оценивается мощностью множества всех подмножеств функций B_3. Поскольку мощность множества функций B_3 является счетной, множество всех подмножеств данного множества имеет мощность континуума.

Для получения нижней оценки мощности множества функций B_3 достаточно рассмотреть замкнутый класс $\mathfrak{M}(S)$, построенный при доказательстве предыдущей теоремы. Этот класс имеет базис $\{f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2, x_3), \dots\}$. Для каждой последовательности $S' = s_1, s_2, \dots$ натуральных чисел, где $2 \leq s_1 < s_2 < \dots$, рассмотрим замкнутый класс $\mathfrak{M}(S')$, имеющий в качестве базиса множество функций $\{f_{s_1}(x_1, \dots, x_{s_1}), f_{s_2}(x_1, \dots, x_{s_2}), \dots\}$. Очевидно, что $\mathfrak{M}(s_1, s_2, \dots) \neq \mathfrak{M}(s'_1, s'_2, \dots)$, если $\{s_1, s_2, \dots\} \neq \{s'_1, s'_2, \dots\}$.

Следовательно, семейство замкнутых классов $\{\mathfrak{M}(S')\}$, принадлежащих множеству замкнутых классов, содержащихся в B_3, является континуальным. $\square$

Возникает вопрос, является ли наличие в классе функций некоторой логики множества соответствующим образом заданных функций $\{f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2, x_3), \dots\}$ обязательным для того, чтобы в данном классе содержался континуум различных замкнутых классов. В общем случае это не так, дело в том, что сформулированные выше условия, определяющие последовательность S функций $f_i(x_1, \dots, x_i)$ $(i \geq 2)$, являются в некотором смысле слишком строгими и требуют возможности воспользоваться по меньшей мере двумя J-операторами, как это имеет место в B_3. Однако эти условия могут быть существенным образом ослаблены, что позволит нам доказать одну из основных в данной работе теорем о том, что в классе функций, соответствующих трехзначной логике Холдена H_3, содержится континуум различных замкнутых классов.

2.4. Континуальность множества замкнутых классов H_3

Исходными связками логики Холдена H_3 являются связки $\{\sim, J_{1/2}, \cap, \cup\}$ (см., например, [2, с. 57]).

Теорема 4. *В множестве замкнутых классов, содержащихся в классе функций, соответствующих логике H_3, содержится класс, не имеющий базиса.*

Доказательство. Последовательность функций

$$S = f_0, f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \dots$$

определяется с использованием оператора Россера–Тюркетта $J_{1/2}(x)$ аналогично тому, как это было сделано в соответствующей теореме для B_3. В дальнейшем доказательство полностью аналогично соответствующему доказательству для B_3. □

Теорема 5. *Класс функций логики H_3 содержит замкнутый класс, имеющий счетный базис.*

Доказательство. Для доказательства утверждения теоремы рассмотрим последовательность

$$S = f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2, x_3), \dots$$

функций $f_i(x_1, \dots, x_i)$, принадлежащих трехзначной логике Поста P_3, для $i \in \{2, 3, \dots\}$, которые удовлетворяют следующему определению:

$$f_i(x_1, \dots, x_i) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_1 = \dots = x_{j-1} = x_{j+1} = \dots = x_i = 1/2, \\ & x_j \in \{1, 0\} \ (1 \le j \le i); \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Покажем, что такие функции определимы посредством исходных функций H_3 для каждого i. Для этого рассмотрим для всякого x_j $(1 \le j \le i)$ и всякого i следующие формулы H_3:

$$F_j =\sim J_{1/2}(x_j)\cap J_{1/2}(x_1)\cap\dots\cap J_{1/2}(x_{j-1})\cap J_{1/2}(x_{j+1})\cap\dots\cap J_{1/2}(x_i).$$

Тогда посредством F для всякого i обозначим результат объединения всех формул F_j при помощи связки внутренней дизъюнкции: $F = \bigcup_1^i F_j$.

В дальнейшем доказательство аналогично соответствующему доказательству для B_3. □

Теорема 6. *Класс функций логики H_3 содержит континуум различных замкнутых классов.*

Доказательство. Число замкнутых классов в H_3 сверху оценивается мощностью множества всех подмножеств функций H_3. Поскольку мощность множества функций H_3 является счетной, множество всех подмножеств данного множества имеет мощность континуума.

Для получения нижней оценки мощности множества функций H_3 достаточно рассмотреть замкнутый класс $\mathfrak{M}(S)$, построенный при доказательстве предыдущей теоремы. Этот класс имеет базис $\{f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2, x_3), \dots\}$. Для каждой последовательности $S' = s_1, s_2, \dots$ натуральных чисел, где $2 \le s_1 < s_2 < \dots$, рассмотрим замкнутый класс $\mathfrak{M}(S')$, имеющий в качестве базиса множество функций $\{f_{s_1}(x_1, \dots, x_{s_1}), f_{s_2}(x_1, \dots, x_{s_2}), \dots\}$. Очевидно, что $\mathfrak{M}(s_1, s_2, \dots) \ne \mathfrak{M}(s'_1, s'_2, \dots)$, если $\{s_1, s_2, \dots\} \ne \{s'_1, s'_2, \dots\}$.

Следовательно, семейство замкнутых классов $\{\mathfrak{M}(S')\}$, принадлежащих множеству замкнутых классов, содержащихся в H_3, является континуальным. □

Отметим, что доказательство теорем 4–6 независимо от доказательств теорем 1–3, и поэтому в силу предполноты H_3 в B_3 оно может рассматриваться в качестве независимого доказательства соответствующих утверждений и для B_3.

На основании вышеизложенных результатов можно предположить, что наличие континуума различных замкнутых классов в классах функций, соответствующих различным многозначным логикам, является не курьезной девиацией, а, скорее, нормой даже для относительно слабых по своим функциональным свойствам логик. Если данное предположение соответствует действительности, это сможет служить еще одним серьезным аргументом в пользу тезиса о качественном отличии многозначных логик от классической двузначной логики.

2.5. О мощности множества предполных классов для произвольного замкнутого класса функций

Вернемся к поставленному в начале главы вопросу о мощности множеств предполных классов для произвольного замкнутого класса. Теорема Кузнецова (см. [4]) о существовании и конечности множеств предполных классов в системах P_k (k-значных логиках Поста, k-значных функционально полных системах) утверждает, что любая k-значная функционально полная система имеет конечное множество предполных классов. Однако в свете значительного числа доказанных утверждений о континуальных свойствах уже трехзначных слабых по функциональным выразительным свойствам замкнутых классов возможность распространения утверждения теоремы Кузнецова на произвольные замкнутые классы представляется сомнительной.

В данном разделе будут, в частности, рассмотрены примеры замкнутых классов, содержащих бесконечное множество предполных классов, а также не имеющих предполных классов. При этом вопрос о существовании континуальных по мощности множеств предполных классов пока остается открытым.

В соответствии с определением предполного в классе F класса G, не существует G', что $G \subset G' \subset F$ и $G \neq G'$.

С другой стороны, Д. Лау в [15] показала, что если решетка (по отношению функциональной вложимости) замкнутых классов, содержащихся в некотором классе, имеет мощность континуума, то в данной решетке содержатся как континуальные цепи, так и континуальные антицепи[2].

Уже этот факт наталкивает на мысль о существовании классов с пустым и бесконечным (возможно, даже континуальным) множеством предполных классов.

Так, например, в качестве достаточного условия пустоты множества предполных классов класса F может выступать гипотетическая ситуация, когда для всякого $G \subset F$ найдется отличный от него G' при $G \subset G' \subset F$. Эта ситуация, возможна в классе F, из которого в решетке всех его подклассов «исходят» лишь континуальные на всех «примыкающих» к F интервалах цепи. В этом случае F очевидным образом не может иметь предполных классов в силу противоречия с приведенным выше следствием определения предполноты.

С другой стороны, в любой континуальной и даже счетно бесконечной антицепи подклассов заданного класса вполне может содержаться бесконечное множество предполных в данном классе подклассов.

Рассмотрим класс $\mathfrak{M}(S) \subset P_3$ из теоремы 1, не имеющий базиса. Докажем об этом классе следующую теорему.

Теорема 7. *Класс* $\mathfrak{M}(S) = [S]$, *порожденный последовательностью функций* $S = f_0, f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \ldots,$ *каждая из которых имеет вид:* $f_0 \equiv 0$;

---

[2]В частично упорядоченном множестве M цепью называется всякое подмножество S данного множества, все элементы которого попарно сравнимы. Антицепью в частично упорядоченном множестве M называется всякое его подмножество S, никакая пара элементов которого несравнима по отношению частичного порядка в M. Очевидно, что любая цепь сама является частично упорядоченным множеством по ограниченному до S отношению порядка из M, а антицепь не упорядочена ограничением соответствующего отношения.

$$f_i(x_1, \dots, x_i) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_1 = \dots = x_i = 1/2; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

не имеет предполных классов.

Доказательство. Допустим в качестве гипотезы от противного, что $\mathfrak{M}(S)$ содержит непустое множество предполных классов. Рассмотрим произвольный класс G, предполный в $\mathfrak{M}(S)$. Этот класс либо может быть порожден системой функций, содержащей лишь конечное число функций из S, либо всякая порождающая его система содержит бесконечное множество функций из S.

Пусть G порожден системой, содержащей конечное число j функций $\{f_{i_1}(x_1, \dots, x_{i_1}), \dots, f_{i_j}(x_1, \dots, x_{i_j})\}$ из S. То есть $G = [\{f_{i_1}(x_1, \dots, x_{i_1}), \dots, f_{i_j}(x_1, \dots, x_{i_j})\}]$.

Тогда в нем имеется функция $f_i(x_1, \dots, x_i)$ с наибольшим индексом i. В этом случае присоединение к этому классу любой функции $f_{i+k}(x_1, \dots, x_{i+k}) \in \mathfrak{M}(S)$, не позволит выразить с помощью входящих в полученную таким образом систему функций ни одну функцию $f_j(x_1, \dots, x_j)$ при $j > i + k$. Это противоречит предполноте G. Следовательно, ни один предполный в $\mathfrak{M}(S)$ класс не может быть порожден системой с лишь конечным числом функций из S.

Пусть G порожден системой, содержащей бесконечно много функций $\{f_{i_1}(x_1, \dots, x_{i_1}), f_{i_2}(x_1, \dots, x_{i_2}), \dots\}$ функций из S. То есть $G = [\{f_{i_1}(x_1, \dots, x_{i_1}), f_{i_2}(x_1, \dots, x_{i_2}), \dots\}]$.

Тогда для любой функции $f_i(x_1, \dots, x_i)$ из $\mathfrak{M}(S)$ в порождающей G системе функций найдется функция $f_j(x_1, \dots, x_j)$, что $j > i$. А значит, $f_i(x_1, \dots, x_i)$ может быть получена из $f_j(x_1, \dots, x_j)$ отождествлением соответствующего числа переменных. То есть замыкание любой бесконечной системы функций из S является полной в $\mathfrak{M}(S)$ системой, что противоречит предполноте G. Поэтому ни один предполный в $\mathfrak{M}(S)$ класс не может быть порожден системой, содержащей бесконечно много функций из S.

Так как класс G не может быть ни конечно, ни бесконечно порожденным, множество предполных классов, содержащихся в $\mathfrak{M}(S)$, является пустым, что и требовалось доказать. $\square$

Рассмотрим теперь класс $\mathfrak{M}(S) \subset P_3$ из теоремы 2, имеющий счетный базис. Докажем об этом классе следующую теорему.

Теорема 8. *Класс $\mathfrak{M}(S) = [S]$, порожденный последовательностью $S = f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2, x_3), \dots$ функций $f_i(x_1, \dots, x_i)$, которые удовлетворяют определению:*

$$f_i(x_1, \dots, x_i) = \begin{cases} 1 & \textit{при } x_1 = \dots = x_{j-1} = x_{j+1} = \dots = x_i = 1/2, \\ & x_j = 1 \ (1 \le j \le i); \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

содержит бесконечное множество предполных классов.

Доказательство. Согласно теореме 2, множество $S = \{f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2, x_3), \dots\}$ функций $f_i(x_1, \dots, x_i)$ является базисом для $\mathfrak{M}(S)$. Так как S – базис, то для всякого $i \ge 2$ верно: $f_i(x_1, \dots, x_i) \notin [\{f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2, x_3), \dots\} \setminus f_i(x_1, \dots, x_i)]$.

Тем не менее, класс $G = [S \setminus f_i(x_1, \dots, x_i)]$ в общем случае не является предполным в $\mathfrak{M}(S)$, поскольку может не содержать части принадлежащих $\mathfrak{M}(S)$ функций, имеющих, например, вид: $f_i(x_1, x_1, x_3, \dots, x_i), f_i(x_1, x_1, x_1, x_4, \dots, x_i), \dots$ $f_i(x_1, \dots, x_1, x_{j+1}, \dots, x_{j+1}, x_{j+1+k}, \dots, x_i), \dots$ и других подобных функций.

Речь идет о функциях, полученных за счет всевозможных отождествлений переменных в $f_i(x_1, \dots, x_i)$. Класс G не будет содержать также никаких суперпозиций функции $f_i(x_1, \dots, x_i)$ с функциями из множества $S \setminus f_i(x_1, \dots, x_i)$.

Пусть F есть $\mathfrak{M}(S) \setminus f_i(x_1, \ldots, x_i)$. Данное множество включает в себя множество всех функций, полученных из $f_i(x_1, \ldots, x_i)$ всевозможными отождествлениями переменных, число таких отождествлений очевидным образом конечно. Обозначим входящие в это множество функции $g^1, \ldots, g^k$. Покажем теперь, что $f_i(x_1, \ldots, x_i) \notin [F]$.

Для этого допустим противное. Пусть $f_i(x_1, \ldots, x_i) \in [F]$.

Тогда функция $f_i(x_1, \ldots, x_i)$ может быть определена одним из следующих трех способов:

- $f_i(x_1, \ldots, x_i) = f_r(\mathfrak{B}_1[f_2, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots, g^1, \ldots, g^k, f_i], \ldots, \mathfrak{B}_r[f_2, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots, g^1, \ldots, g^k, f_i])$, где $r \geq 2$.
- $f_i(x_1, \ldots, x_i) = f_i(\mathfrak{B}_1[f_2, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots, g^1, \ldots, g^k, f_i], \ldots, \mathfrak{B}_r[f_2, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots, g^1, \ldots, g^k, f_i])$.
- $f_i(x_1, \ldots, x_i) = g_r^j(\mathfrak{B}_1[f_2, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots, g^1, \ldots, g^k, f_i], \ldots, \mathfrak{B}_r[f_2, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots, g^1, \ldots, g^k, f_i])$, где $r \geq 2$, $1 \leq j \leq k$.

Причем если выполняется одно из первых двух равенств, доказательство невыразимости $f_i(x_1, \ldots, x_i)$ только через функции из $\mathfrak{M}(S) \setminus f_i(x_1, \ldots, x_i)$ осуществляется разбором трех случаев, аналогичных доказательству теоремы 2 с учетом определения функций $g^1, \ldots, g^k$.

Приведем разбор третьего равенства.

Если верно третье равенство, три случая теоремы 2 изменяются следующим образом:

1. Среди формул

$$\mathfrak{B}_1[f_2, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots, g^1, \ldots, g^k, f_i], \ldots, \\ \mathfrak{B}_r[f_2, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots, g^1, \ldots, g^k, f_i],$$

где $r \geq 2$, по крайней мере две формулы отличны от символов переменных. В этом случае для всякого набора значений $\langle a_1, \ldots, a_i \rangle$ переменных $x_1, \ldots, x_i$ на соответствующих аргументных местах в функции

$$g_r^j(\mathfrak{B}_1[f_2,\dots,f_{i-1},f_{i+1},\dots,g^1,\dots,g^k,f_i],\dots,\\ \mathfrak{B}_r[f_2,\dots,f_{i-1},f_{i+1},\dots,g^1,\dots,g^k,f_i])$$

будут находиться значения 1 либо 0, а вся данная функция в соответствии с определением функций из $\mathfrak{M}(S)\setminus f_i(x_1,\dots,x_i)$ будет тождественно равна 0, что противоречит допущению об определимости $f_i(x_1,\dots,x_i)$ только через функции, содержащиеся в множестве $\mathfrak{M}(S)\setminus f_i(x_1,\dots,x_i)$, поскольку ни одна из функций в множестве $S=\{f_2(x_1,x_2),f_3(x_1,x_2,x_3),\dots\}$ не является тождественно равной нулю.

2. Среди формул

$$\mathfrak{B}_1[f_2,\dots,f_{i-1},f_{i+1},\dots,g^1,\dots,g^k,f_i],\dots,\\ \mathfrak{B}_r[f_2,\dots,f_{i-1},f_{i+1},\dots,g^1,\dots,g^k,f_i]$$

имеется единственная формула $\mathfrak{B}_s$, которая отлична от символа переменной. По условию данного случая, функции, соответствующие остальным формулам, сводятся к переменным, и поскольку $r\geq 2$, то найдется по крайней мере одна формула $\mathfrak{B}_p\equiv x_q$. Рассмотрим набор $\langle a_1,\dots,a_m\rangle$ значений переменных $x_1,\dots,x_m$, что $a_1=\dots=a_{q-1}=a_{q+1}=\dots=a_m={}^1\!/_2$ и $a_q=1$. На этом наборе соответствующая формуле $\mathfrak{B}_s$ функция принимает значение 1 либо 0. Значит, на наборе $\langle a_1,\dots,a_m\rangle$ значений переменных $x_1,\dots,x_m$ в функции

$$g_r^j(\mathfrak{B}_1[f_2,\dots,f_{i-1},f_{i+1},\dots,g^1,\dots,g^k,f_i],\dots,\\ \mathfrak{B}_r[f_2,\dots,f_{i-1},f_{i+1},\dots,g^1,\dots,g^k,f_i])$$

по крайней мере на двух аргументных местах будут стоять значения, отличные от ${}^1\!/_2$. Поэтому правая часть равенства обратится в 0, а левая его часть должна быть равна единице 1, по определению функции $f_i(x_1,\dots,x_i)$, что невозможно.

3. Все формулы

$$\mathfrak{B}_1[f_2,\dots,f_{i-1},f_{i+1},\dots,g^1,\dots,g^k,f_i],\dots,\\ \mathfrak{B}_r[f_2,\dots,f_{i-1},f_{i+1},\dots,g^1,\dots,g^k,f_i]$$

эквивалентны символам переменных. Тогда формула

$$g_r^j(\mathfrak{B}_1[f_2,\ldots,f_{i-1},f_{i+1},\ldots,g^1,\ldots,g^k,f_i],\ldots,\\ \mathfrak{B}_r[f_2,\ldots,f_{i-1},f_{i+1},\ldots,g^1,\ldots,g^k,f_i])$$

есть $g_r^j(x_1,\ldots,x_r)$. Но для всякого g_r^j верно, что $r < i$, а значит, $f_i(x_1,\ldots,x_i) \neq g_r^j(x_1,\ldots,x_r)$, что противоречит допущению о выразимости $f_i(x_1,\ldots,x_i)$ посредством $g_r^j(x_1,\ldots,x_r)$.

Поскольку во всех трех случаях приходим к противоречию, получаем $f_i(x_1,\ldots,x_i) \notin [\mathfrak{M}(S) \setminus f_i(x_1,\ldots,x_i)]$.

Следовательно, для всякого i класс $[\mathfrak{M}(S) \setminus f_i(x_1,\ldots,x_i)]$ является предполным в $\mathfrak{M}(S)$. А значит, класс $\mathfrak{M}(S)$ содержит бесконечное множество предполных классов.

Эти классы будут иметь вид:

$$[\mathfrak{M}(S) \setminus f_2(x_1,x_2)],\ [\mathfrak{M}(S) \setminus f_3(x_1,x_2,x_3)],\\ [\mathfrak{M}(S) \setminus f_4(x_1,x_2,x_3,x_4)],\ldots$$

□

Литература

[1] *Карпенко А.С.* Логики Лукасевича и простые числа, М.: Наука, 2000. 319 с.

[2] *Карпенко А.С.* Развитие многозначной логики М.: ЛКИ. 2010. 448 с.

[3] *Карпенко А.С.* Континуальность трехзначных логик: проблемы и гипотезы // Логические исследования. Вып. 16. 2010. С. 127–133.

[4] *Кузнецов А.В.* О проблемах тождества и функциональной полноты для алгебраических систем // Труды 3-го Всесоюзного математического съезда. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 145–146.

[5] *Мучник А.А., Янов Ю.И.* О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // ДАН СССР. 1959. Т. 127(1). С. 44–46.

[6] *Раца М.Ф.* О функциональной полноте в интуиционистской логике высказываний // Проблемы кибернетики. 1982. Вып. 39. С. 107–150.

[7] *Раца М.Ф.* О классе функций трехзначной логики, соответствующем первой матрице Яськовского // Проблемы кибернетики. 1969. Вып. 21. С. 185–214.

[8] *Раца М.Ф.* Итеративные цепные классы псевдобулевых функций. Кишинев: Штиинца. 1990. 236 с.

[9] *Родин А.А.* О континуальности множества специальных предполных классов во множестве автоматных отображений // Интеллектуальные системы. Т. 16. Вып. 1–4. 2012. С. 329–334.

[10] *Финн В. К.* О критерии функциональной полноты для B_3 // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М.: Наука. 1974. С. 194–199.

[11] *Финн В.К.* Аксиоматизация некоторых трехзначных исчислений высказываний и их алгебр // Философия в современном мире. Философия и логика. М.: Наука, 1974. С. 398–438.

[12] *Яблонский С.В.* Функциональные построения в k-значной логике. Труды математического института имени В. А. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.

[13] *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986. 384 с.

[14] *Halldén S.* The Logic of Nonsense. Uppsala: Uppsala Universitets Arsskrift, 1949. 132 p.

[15] *Lau D.* Function Algebras on Finite Sets. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 2006. 670 p.

[16] *Prelovskiy N.N.* Cardinality of sets of closed functional classes in weak 3-valued logics // Logical investigations. 2013. Vol. 19. P. 334–343.

ГЛАВА 3.

О РАСШИРЕНИИ КЛАССА ЕСТЕСТВЕННЫХ ТРЕХЗНАЧНЫХ ЛОГИК: НОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ

3.1. Введение

В работах [5, 18] было введено понятие естественной импликации, оно позволило структурировать и наглядно показать функциональные отношения между различными трехзначными системами. Это было сделано посредством рассмотрения расширений регулярных логик Клини с помощью добавления связки естественной импликации. В результате классы функционально эквивалентных систем образовали семиэлементную решетку базовых трехзначных логик: $\mathbf{Ł_3}$, **PCont**, $\mathbf{B_3}$, **Z**, $\mathbf{T^3}$, $\mathbf{T^2}$, $\mathbf{T^1}$. Логики, содержащие естественную импликацию были названы нами естественными.

Отметим, что ранее класс естественных трехзначных логик был выделен А. Авроном в статье [8]. Но здесь к естественным логикам относятся только сильная логика Клини $\mathbf{K_3}$ и ее четыре расширения: логика Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$, логика **LPF**, логика $\mathbf{RM_3}$ и паранепротиворечивая логика **PCont**. Для каждой системы рассматривается свое отношение логического следования. Показано, что эти расширения образуют 2 функционально эквивалентных класса: логики эквивалентные $\mathbf{Ł_3}$ и логики эквивалентные **PCont**.

В настоящей работе мы вновь обратимся к введенному определению естественной импликации. Оно будет пересмотрено и уточнено на основании видоизменения одного условия в определении естественной импликации, а именно, условия нормальности. В связи с этим будут проанализированы две формулировки правила *modus ponens*: «сильная»: относительно выделенного значения и «слабая»: относительно тавтологий. На этом основании будет проведено различие между *строго* естественными и *слабо* естественными импликациями. Будет выделен новый класс матриц, в которых операция импликации является слабо естественной. Далее поставлена задача уточнения классификации трехзначных логик, полученной нами в [5], где семь *базовых* логик представлены как импликативные расширения регулярных логик Клини. Возникает вопрос повлияет ли изменение условия нормальности на классификацию, появятся ли кроме семи базовых систем новые системы.

3.2. Базовые определения

Определение 1. Язык L есть пропозициональный язык, алфавит которого состоит из счетного множества пропозициональных переменных $Var = \{p_1, p_2, \dots\}$ и конечного множества связок конечной местности Con.

В рамках предложенного исследования нас будет интересовать пропозициональный язык, множество связок которого состоит из одной связки — импликации $\rightarrow$. Такой пропозициональный язык обозначим как $L_{\rightarrow}$.

Определение 2. Определим класс $For_{\rightarrow}$ следующим образом:

(1) если $p_i \in Var$, то $p_i \in For_{\rightarrow}$;

(2) если $A \in For_{\rightarrow}$ и $B \in For_{\rightarrow}$, то $A \rightarrow B \in For_{\rightarrow}$.

(3) ничто иное не принадлежить $For_{\rightarrow}$.

Определение 3. $M = \langle V, F, D \rangle$ есть логическая матрица, где $V = \{0, 1/2, 1\}$ множество истинностных значений, D — множество выделенных значений ($D \subset V$) и F — конечное множество «базовых» операций конечной местности, заданных на V.

Определение 4. Оценка v $L_{\rightarrow}$-формулы в матрице M для языка $L_{\rightarrow}$ есть такое отображение $For_{\rightarrow}$ в V, что

- если $p_i \in Var$, то $v(p_i) \in V$;
- $v(A \rightarrow B) = v(A) \rightarrow v(B)$.[1]

Определение 5. Пусть $M = \langle V, F, D \rangle$ — логическая матрица, где операция $\circ \in F$, а A и B — произвольные формулы из For и v — оценка в M, тогда M называется *нормальной матрицей*, если $v(A) \in D$ и $v(B) \notin D$ всегда влекут $v(A \circ B) \notin D$.

Определение 6. Некоторая $L_{\rightarrow}$-формула A есть *тавтология* в M (сокращенно — $\models_M A$), е.т.е. для каждой оценки v в M верно, что $v(A) \in D$.

Определение 7. $L_{\rightarrow}$-формула B логически следует из множества $L_{\rightarrow}$-формул $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ в M (сокращенно — $\Gamma \models_M B$), е.т.е. не существует такой оценки v в M, что $v(A_i) \in D$ для каждой $A_i \in \Gamma$, и $v(B) \notin D$.

Особое значение в данном исследовании имеет определение правила логического вывода. В общем виде можно дать следующее определение.

Определение 8. Под правилом над множеством For понимают отношение $r \subseteq \mathcal{P}(For) \times For$, где $\mathcal{P}(For)$ есть множество всех подмножеств For и $\times$ есть операция декартова произведения.

[1]Мы используем одинаковые символы для обозначения логической связки и соответсвующей операции в матрице.

Замечание 1. В связи с понятиями тавтологии и правила логического вывода выделяют так называемые *допустимые* правила (admissibility rule) или правила, *сохраняющие тавтологию* (tautology-preserving rule) (см., например, [17, p. 44, 242][2]). Рассмотрим следующие различные уровни следования:

С одной стороны, конкретные логические следования, т.е. выражения вида $\Gamma \vDash C$, есть правила логического вывода или правила, *сохраняющие истину* (truth-preserving rule).

С другой стороны, выражения вида $\vDash H_1, \vDash H_2, \ldots, \vDash H_n \Rightarrow \vDash C$ называют *допустимыми правилами*, т.е. всякий раз, когда формулы H_1, H_2,..., H_n являются тавтологиями, C является также тавтологией.[3]

Указанное различие в правилах принципиально важно для дальнейшего изложения.

3.3. Определение естественной импликации: ослабление условия нормальности

В данном разделе обратимся к определению естественной импликации, введенному нами ранее в [5], и отдельно остановимся на анализе условия (2) — условия нормальности, рассмотрим ослабление данного условия. Далее будет выделен класс трехзначных логических матриц, в которых операция импликации также может быть названа естественной с учетом ослабления условия (2).

Определение 9. Импликацию $\to$ будем называть *естественной*, если она обладает следующими свойствами:

(1) **C**-расширение, т.е. ограничение $\to$ на подмножество $\{0, 1\}$ множества V_3 есть обычная классическая связка импликации.

[2]См. также [20, p. 145]

[3]Здесь и далее «$\Rightarrow$» используется в качестве знака метаязыка в смысле классической импликации.

(2) Нормальность в смысле Лукасевича–Тарского [11, p. 134], т.е. если $x \to y \in D$ и $x \in D$, то $y \in D$.

(3) Согласованность с частичным порядком на V_3: если $x \leq y$, то $x \to y \in D$.

(4) $x \to y \in V_3$, в остальных случаях.

В результате имеем 30 импликаций, удовлетворяющих данному определению: при $D = \{1\}$ — 6 импликаций, при $D = \{1, 1/2\}$ — 24 импликации. (Две импликации $\to_1$ и $\to_4$ удовлетворяют указанному определению как при $D = \{1\}$, так и при $D = \{1, 1/2\}$.)

В книге [16, p. 70–71] Н. Решер обращает внимание читателя, что при исследованиях в области многозначных логик принципиально важно различать следующие две формулировки правила *modus ponens*:

(i) *modus ponens* относительно сохранения выделенного значения;

(ii) *modus ponens* относительно сохранения тавтологии.

Символические формулировки правила *modus ponens*, сотвествующие (i) и (ii), можно представить следующим образом:

(i) $\{A, A \to B\} \vDash_M B$ или

$\forall A \forall B \forall v[v(A) \in D \;\&\; v(A \to B) \in D \Rightarrow v(B) \in D]$;

(ii) $\vDash_M A, \; \vDash_M A \to B \;\Rightarrow\; \vDash_M B$ или

$\forall A \forall B[\forall v(v(A) \in D) \,\&\, \forall v(v(A \to B) \in D) \Rightarrow \forall v(v(B) \in D)]$.

Таким образом, формулировки (i) и (ii) демонстрируют, что в первом случае *modus ponens* есть правило логического вывода, во втором — лишь допустимым правилом. И в случае (i) в соответствующем исчислении корректное применение *modus ponens* возможно как в доказательстве, так и в выводе, в случае же (ii) — только в доказательстве[4].

При анализе приведенных формулировок несложно увидеть, что всегда из (i) следует (ii). Обратное же в общем случае не имеет места. Ниже рассмотрим соответствующие примеры.

3.3.1. *Modus ponens*: двузначный и трехзначный случаи

Пусть M^{cl} есть двузначная логическая матрица

$$M^{cl} = \langle \{0, 1\}, \to_{cl}, \{1\} \rangle,$$

где $\to_{cl}$ определяется следующим образом:

$\to_{cl}$	1	0
1	1	0
0	1	1

В случае двузначной логики может быть использована любая из двух формулировок правила *modus ponens*, они эквивалентны.

Но в случае трехзначной логики это не так: если имеет место (i), то имеет место и (ii), но не наоборот.

Для примера рассмотрим следующую логическую матрицу: $M^{29,2} = \langle \{0, 1/2, 1\}, \to_{29}, \{1, 1/2\} \rangle$, где $\to_{29}$ определяется следующей таблицей:

$\to_{29}$	1	$1/2$	0
1	1	1	0
$1/2$	1	1	1
0	1	1	1

[4] Напомним, что в выводе возможно использование допущений и гипотез.

Несложно проверить, что *modus ponens* в формулировке (i) не имеет места в $M^{29,2}$. Так, можно подобрать такую оценку v для A и B, что $v(A) = 1/2$, $v(A \to_{29} B) = 1$ и $v(B) = 0$.

Однако в $M^{29,2}$ *modus ponens* сохраняет тавтологию, т.е. формулировка (ii) проходит.

Теорема 1. *В матрице $M^{29,2}$ имеет место modus ponens в формулировке (ii), т.е.*

$$\forall v(v(A) \in \{1, 1/2\}) \,\&\, \forall v(v(A \to_{29} B) \in \{1, 1/2\}) \Rightarrow \forall v(v(B) \in \{1, 1/2\}).$$

Доказательство.

1.	Пусть утверждение теоремы неверно	– доп.
2.	$\forall v(v(A) \in \{1, 1/2\})$ и $\forall v(v(A \to_{29} B) \in \{1, 1/2\})$ и $\exists v(v(B) \notin \{1, 1/2\})$	– из 1
3.	$\forall v(v(A) \in \{1, 1/2\})$	– из 2
4.	$\forall v(v(A \to_{29} B) \in \{1, 1/2\})$	– из 2
5.	$\exists v(v(B) \notin \{1, 1/2\})$	– из 2
6.	$v'(B) = 0$	– из 5, снят. $\exists$
7.	$v'(A) \in \{1, 1/2\}$	– из 3, снят. $\forall$
	Случай 1.	
8.	$v'(A) = 1$	– из 7
9.	$v'(A) \to_{29} v'(B) = 0$	– из 8, 6, опр. $\to_{29}$
10.	$v'(A \to_{29} B) = 0$	– из 9, опр. 4
11.	$\exists v(v(A \to_{29} B) \notin \{1, 1/2\})$	– из 10
12.	Допущение (1) неверно	– из 11, 4
	Случай 2.	
13.	$v'(A) = 1/2$	– из 7
14.	Из анализа таблицы для $\to_{29}$ следует, что $v'(A) = 1/2$	

лишь в случае, если A есть пропозициональная переменная, но тогда

15. $\exists v(v(A)=0)$ – из 14

16. Допущение (1) неверно – из 15, 3

$\square$

Теорема, аналогичная теореме 1, справедлива также для матрицы $M^{29,1} = \langle\{0, {}^{1}\!/_{2}, 1\}, \rightarrow_{29}, \{1\}\rangle$. Доказательство будет строиться по тому же принципу.

В работах [10, p. 167] и [17, p. 243] приведены примеры таблиц, определяющих операции импликации для трехзначных логических матриц, и дано доказательство того факта, что в данных матрицах имеет место (ii), но не (i). В следующей части работы будет определен целый класс таких матриц.[5]

3.4. Расширенный класс естественных импликаций

Используя определение естественной импликации, имеем возможность определить класс трехзначных матриц, в которых *modus ponens* выступает как правило, сохраняющее тавтологию. Для этого обратимся к определению естественной импликации и ослабим условие нормальности (2), заменив его на условие (ii). Импликации, удовлетворяющие определению 9 с условием (ii), назовем *слабо* естественными. Соответственно импликации, удовлетворяющие определению 9 с условием (2), будем именовать *строго* естественными.[6]

Доказательство того факта, что в конкретной трехзначной логической матрице операция, соответствующая связке импли-

[5]Отметим, что в работе [17, p. 243] приведен пример логики, в которой импликация не является естественной и правило *modus ponens* сохраняет тавтологию, но не сохраняет выделенное значение.

[6]Очевидно, что если импликация является строго естественной, то она является и слабо естественной, но не наоборот.

кации, является таковой, что правило *modus ponens* сохраняет свойство «быть тавтологией», будет разбито нами на 4 случая, в каждом из которых будет представлено доказательство для определенных типов логических матриц. Далее покажем, что только в этих трехзначных матрицах импликации являются слабо естественными, то есть для них имеет место условие (ii), но не выполняется условие (i).

Случай 1. Рассмотрим следующие две трехзначные логические матрицы:

$M^{5,2} = \langle\{0, {}^1\!/_2, 1\}, \rightarrow_5, \{1, {}^1\!/_2\}\rangle$,

$M^{7,1} = \langle\{0, {}^1\!/_2, 1\}, \rightarrow_7, \{1\}\rangle$,

где $\rightarrow_5$ и $\rightarrow_7$ определяются таблицами:

$\rightarrow_5$	1	$^1\!/_2$	0
1	1	0	0
$^1\!/_2$	1	1	1
0	1	1	1

$\rightarrow_7$	1	$^1\!/_2$	0
1	1	1	0
$^1\!/_2$	1	1	0
0	1	1	1

Напомним, что матрицы

$M^{5,1} = \langle\{0, {}^1\!/_2, 1\}, \rightarrow_5, \{1\}\rangle$ и

$M^{7,2} = \langle\{0, {}^1\!/_2, 1\}, \rightarrow_7, \{1, {}^1\!/_2\}\rangle$,

отличающиеся от выше приведенных классом выделенных значений D, являются нормальными.

Доказательство того факта, что в $M^{5,2}$ и $M^{7,1}$ имеет место правило (ii), проводится аналогично доказательствам для $M^{29,1}$ и $M^{29,2}$.

Замечание 2. В фундаментальной книге [10, p. 163–164] автор приводит частные случаи правила *modus ponens*:

(1) *Из* $A_1 \rightarrow A_2$ *и* $(A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow B$ *следует* B,

(2) *Из* A *и* $A \rightarrow (B_1 \rightarrow B_2)$ *следует* $B_1 \rightarrow B_2$,

(3) *Из* $A_1 \to A_2$ *и* $(A_1 \to A_2) \to (B_1 \to B_2)$ *следует* $B_1 \to B_2$,

указывая на то, что для $M^{5,2}$ $\{p, p \to_5 q\} \vDash_{M^{5,2}} q$ не имеет места, но можно использовать любое из правил (1)–(3), при этом все тавтологии сохранятся. Отметим, что это имеет место и для матриц $M^{7,1}$, $M^{29,1}$ и $M^{29,2}$.

Обратим внимание на то, что в работе [2] рассмотрены трехзначные логические матрицы[7]:

$$M^{*,1} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \to_5, \neg^*, \{1\}\rangle,$$
$$M^{*,2} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \to_5, \neg^*, \{1, 1/2\}\rangle,$$
$$M^{\Diamond,1} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \to_7, \neg^{\Diamond}, \{1\}\rangle,$$
$$M^{\Diamond,2} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \to_7, \neg^{\Diamond}, \{1, 1/2\}\rangle,$$

в которых операции $\to_5$ и $\to_7$ определяюся приведеннными выше таблицами, а $\neg^*1 = 0, \neg^*1/2 = \neg^*0 = 1$ и $\neg^{\Diamond}1 = \neg^{\Diamond}1/2 = 0, \neg^{\Diamond}0 = 1$. Здесь же приведено строгое доказательство, что каждая из этих матриц является характеристической матрицей классической пропозициональной логики.

В работе [12] Г. Малиновский рассматривает трехзначную логику, которая задается матрицей S_3, представляющей собой матрицу $M^{*,2}$ с расширенным классом базовых операций[8]. Показано, что S_3 задает классический класс тавтологий, но отношение логического следования не является классическим, что демонстрируется как раз на примере:

$$\{p_1, p_1 \to p_2\} \vDash_{M_{C_2}} p_2 \text{ и } \{p_1, p_1 \to p_2\} \nvDash_{S_3} p_2.$$

Полный класс импликативно-негативных трехзначных логических матриц с классическим классом тавтологий и отношением логического следования, отличным от классического, содержится в работе Л.Ю. Девяткина [1, глава 3].

[7]Матрицы $M^{*,1}$, $M^{*,2}$, $M^{\Diamond,1}$ и $M^{\Diamond,2}$ отличаются от матриц $M^{5,1}$, $M^{5,2}$, $M^{7,1}$ и $M^{7,2}$ расширенным классом F базовых операций.

[8]Заметим, что посредством базовых операций $M^{*,2}$ возможно определить и остальные операции S_3.

Случай 2. Рассмотрим следующий класс матриц:

$M^{\alpha,2} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \rightarrow_i, \{1, 1/2\}\rangle,$

где $i \in \{2, 30, 31, 32, 33\}$ и $\rightarrow_2$, $\rightarrow_{30}$, $\rightarrow_{31}$, $\rightarrow_{32}$, $\rightarrow_{33}$ определяются таблицами:

$\rightarrow_2$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	1
0	1	1	1

$\rightarrow_{30}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1	1

$\rightarrow_{31}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2
0	1	1/2	1

$\rightarrow_{32}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2
0	1	1	1

$\rightarrow_{33}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1/2	1

Соответствующие логические матрицы обозначим как $M^{2,2}$, $M^{30,2}$, $M^{31,2}$, $M^{32,2}$ и $M^{33,2}$. Обратим внимание, что таблицы для $\rightarrow_{30}$, $\rightarrow_{31}$, $\rightarrow_{32}$, $\rightarrow_{33}$ определяют импликации регулярных логик Клини: $\mathbf{K_3}$, $\mathbf{K_3^w}$, $\mathbf{K_3^{\rightarrow}}$ и $\mathbf{K_3^{\leftarrow}}$ соответственно.

В работе [1, с. 80–94] доказано, что матрицы

$M^{2,2}_{\neg^*} = \langle\{0, 1/2, 0\}, \rightarrow_2, \neg^*, \{1, 1/2\}\rangle,$

$M^{30,2}_{\sim} = \langle\{0, 1/2, 0\}, \rightarrow_{30}, \sim, \{1, 1/2\}\rangle,$

$M^{31,2}_{\sim} = \langle\{0, 1/2, 0\}, \rightarrow_{31}, \sim, \{1, 1/2\}\rangle,$

$M^{32,2}_{\sim} = \langle\{0, 1/2, 0\}, \rightarrow_{32}, \sim, \{1, 1/2\}\rangle,$

$M^{33,2}_{\sim} = \langle\{1, 1/2, 0\}, \to_{33}, \sim, \{1, 1/2\}\rangle$

совпадают по классу тавтологий с классической логикой.[9] Из этого следует

ФАКТ 1. Пусть $M^{cl} = \langle\{0,1\}, \to_{cl}, \{1\}\rangle$[10] и $M^{\alpha,2} \in \{M^{2,2}, M^{30,2}, M^{31,2}, M^{32,2}, M^{33,2}\}$, тогда для любой формулы A

$$\text{если } \exists v(v(A) = 0), \text{ то } \exists w(w(A) = 0),$$

где v-оценка в $M^{\alpha,2}$ и w-оценка в M^{cl}. То есть для любой формулы верно, что если она не является тавтологией в $M^{\alpha,2}$, то она также не является и классической тавтологией.

Данный факт потребуется для доказательства следующей теоремы:

Теорема 2. *Если* $M^{\alpha,2} \in \{M^{2,2}, M^{30,2}, M^{31,2}, M^{32,2}, M^{33,2}\}$, *то* $\forall A \forall B[\forall v(v(A) \in \{1, 1/2\}) \,\&\, \forall v(v(A \to_i B) \in \{1, 1/2\}) \Rightarrow \forall v(v(B) \in \{1, 1/2\})]$ $(i \in \{2, 30, 31, 32, 33\})$, *т.е. в* $M^{\alpha,2}$ *имеет место modus ponens в формулировке (ii).*

Доказательство.

1. Пусть утверждение теоремы неверно	– допущение
2. $\forall v(v(A) \in \{1, 1/2\})$ и	
$\forall v(v(A \to_i B) \in \{1, 1/2\})$ и	
$\exists v(v(B) \notin \{1, 1/2\})$	– из 1
3. $\forall v(v(A) \in \{1, 1/2\})$	– из 2
4. $\forall v(v(A \to_i B) \in \{1, 1/2\})$	– из 2
5. $\exists v(v(B) \notin \{1, 1/2\})$	– из 2
6. $\exists v'(v'(B) = 0)$ $_{v' \in \{\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_n\rangle \mid \gamma_i \in \{1,0\}\}}$	– из 5 и факта 1
7. $v'(B) = 0$	– из 6, снятие $\exists$
8. $v'(A) = 1$	– из 3, опред. v', снятие $\forall$

[9] Определение $\neg^*$ приведено на стр. 106; $\sim x = 1 - x$.

[10] Определение $\to_{cl}$ приведено на стр. 102.

9. $v'(A) \rightarrow_i v'(B) = 0$ – из 8, 7, опр. $\rightarrow_i$
10. $v'(A \rightarrow_i B) = 0$ – из 9, опр. 4
11. $\exists v(v(A \rightarrow_i B) \notin \{1, 1/2\})$ – из 10
12. Допущение (1) неверно – из 11, 4

□

Нестрогое доказательство того факта, что в $M^{30,2}$ имеет место *modus ponens* в формулировке (ii) приведено Н. Решером в [16, p. 70].

Замечание 3. Для многих логических систем требование нормальности является существенным. Однако, для ряда систем, в которых правило *modus ponens* не сохраняет истину (выделенное значение), но сохраняет тавтологию является важным преимуществом. Интересно, что одним из подходов для решения логико-семантических парадоксов является отказ от импликации, для которой имеет место *modus ponens* в формулировке (i). Именно такой является импликация ($\rightarrow_{30}$) в паранепротиворечивой логике Приста **LP** [14, 9][11]. Так, например, в трехзначных логиках $\mathbf{K_3}$ и $\mathbf{Ł}_3$ имеет место $\not\models (p \wedge \neg p) \supset q$, хотя из противоречия следует все, что угодно, т.е. $p \wedge \neg p \models q$. В **LP** это не так: хотя и имеет место $\models_{LP} (p \wedge \neg p) \supset q$, но из противоречия не следует все, что угодно: $p \wedge \neg p \not\models_{LP} q$, как раз за счет того, что сильная формулировка *modus ponens* не имеет место [15, p. 126-127].

Случай 3. Рассмотрим следующий класс матриц:

$$M^{\beta,2} = \langle \{0, 1/2, 1\}, \rightarrow_j, \{1, 1/2\} \rangle,$$

где $j \in \{3, 34, 35, 36, 37, 38, 39\}$ и $\rightarrow_3$, $\rightarrow_{34}$, $\rightarrow_{35}$, $\rightarrow_{36}$, $\rightarrow_{37}$, $\rightarrow_{38}$, $\rightarrow_{39}$ определяются таблицами:

[11] Логика Приста **LP** есть сильная логика Клини $\mathbf{K_3}$ с двумя выделенными значениями.

$\to_3$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	1/2
0	1	1	1

$\to_{34}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1	1
0	1	1	1

$\to_{35}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1/2	1
0	1	1	1

$\to_{36}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1
0	1	1	1

$\to_{37}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1	1/2
0	1	1	1

$\to_{38}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1	1/2
0	1	1/2	1

$\to_{39}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	1/2
0	1	1/2	1

Соответствующие логические матрицы обозначим как $M^{3,2}$, $M^{34,2}$, $M^{35,2}$, $M^{36,2}$, $M^{37,2}$, $M^{38,2}$ и $M^{39,2}$. Заметим, что $M^{3,2}$ задает импликативный фрагмент логики Лукасевича с двумя выделенными значениями.

Согласно теореме Тарского-Бернайса [11, p. 145, Th. 29] импликативный фрагмент классической логики может быть аксиоматизирован посредством

$K:\ p \to (q \to p)$

$S:\ (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

$P:\ ((p \to q) \to p) \to p$

и правила вывода *modus ponens*.

Заметим, что все матрицы из класса $M^{\beta,2}$ верифицируют K, S и P. Это позволяет сделать следующее утверждение:

Утверждение 1. Любая матрица из класса $M^{\beta,2}$ с точки зрения класса тавтологий эквивалентна импликативному фрагменту классической логики.

Замечание 4. Интересно, что в случае логики Лукасевича с двумя выделенными значениями, которая определяется матрицей $M^{3,2}_{\sim} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \to_3, \sim, \{1, 1/2\}\rangle$, верификация закона утверждения консеквента, закона самодистрибутивности и закона обратной контрапозици не обеспечивает совпадение с классичской логикой по классу тавтологий, что подтверждается контрпримером А. Тюркетта $\sim(p \to_3 \sim p) \vee \sim(\sim p \to_3 p)$[12]. Кстати, этот же контрпример можно использовать для демонстрации того, что в $M^{3,2}_{\sim}$ не проходит слабая формулировка *modus ponens*, т.е. неверно, что

из $\models_{M^{3,2}_{\sim}} p \vee \sim p$
и $\models_{M^{3,2}_{\sim}} (p \vee \sim p) \to_3 (\sim(p \to_3 \sim p) \vee \sim(\sim p \to_3 p))$,
следует $\models_{M^{3,2}_{\sim}} \sim(p \to_3 \sim p) \vee \sim(\sim p \to_3 p)$.

Именно отсутствие операции отрицания в $M^{\beta,2}$ делает невозможным подобный контрпример и обеспечивает эквивалентность по классу тавтологий импликативному фрагменту классической логики.

Теорема 3. *Если* $M^{\beta,2} \in \{M^{3,2}, M^{34,2}, M^{35,2}, M^{36,2}, M^{37,2}, M^{38,2}, M^{39,2}\}$, *то* $\forall A \forall B[\forall v(v(A) \in \{1, 1/2\}) \,\&\, \forall v(v(A \to_j B) \in \{1, 1/2\}) \Rightarrow \forall v(v(B) \in \{1, 1/2\})]$ $(j \in \{3, 34, 35, 36, 37, 38, 39\})$, *т.е. в* $M^{\beta,2}$ *имеет место modus ponens в формулировке (ii).*

Доказательство теоремы 3 проводится аналогично доказательству теоремы 2 с использованием утверждения 1. $\square$

[12]Заметим, что в [3, с. 60] указано, что определен целый класс подобных контрпримеров.

Случай 4. Рассмотрим две матрицы:

$M^{40,2} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \rightarrow_{40}, \{1, 1/2\}\rangle$ и
$M^{41,2} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \rightarrow_{41}, \{1, 1/2\}\rangle$,

где $\rightarrow_{40}$ и $\rightarrow_{41}$ определяются таблицами:

$\rightarrow_{40}$	1	1/2	0
1	1	1	0
1/2	1	1	1
0	1	1/2	1

$\rightarrow_{41}$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	1/2	1/2	1/2
0	1	1	1

Матрицы $M^{40,2}$ и $M^{41,2}$ не верифицируют импликативный фрагмент классической логики. Так, в $M^{40,2}$ не проходят S и P, а в $M^{41,2}$ — K. Но для указанных матриц имеет место *modus ponens* в формулировке (ii).

При доказательстве данного утверждения для $M^{40,2}$ ключевую роль имеет то, что в $M^{40,2}$, если некоторая формула является тавтологией, то она при любой оценке принимает значение 1, т.е. если в $M^{40,2}$ $\exists v(v(A) = 1/2)$, то обязательно $\exists v'(v'(A) = 0)$. Далее доказательство проводится аналогично теореме 1.

Строгое доказательство того, что для $M^{41,2}$ имеет место (ii) отсутствует. Однако можно предложить следующее обоснование.

Если некоторая оценка в $M^{41,2}$ удовлетворяет следующему условию: $\forall w : w \in \{\langle\gamma_1, ..., \gamma_n\rangle | \exists\gamma_i(\gamma_i = 1/2)\}$, назовем w *неклассической оценкой*.

Заметим, что свойства таблицы для $\rightarrow_{41}$ таковы, что любая формула вида $C \rightarrow_{41} D$, состоящая из двух различных переменных, будет иметь ровно 3 таких оценки, когда $C \rightarrow_{41} D$ примет значение 1/2, если три различных переменных — соответственно 9 таких оценок и т.д. (Это свойство обозначим как $\diamond$.)

Рассмотрим следующий пример. Пусть имеется формула A, которая является тавтологией в $M^{41,2}$ и состоит из двух попарно различных переменных p_1 и p_2. И имеется формула B, в состав которой входит p_1 или p_2, или обе переменный сразу, и B не является тавтологий в $M^{41,2}$ и на некоторой неклассической оценке w принимает значение 0.

Тогда согласно свойству $\diamond$ для формулы $A \to_{41} B$ в таблице существует 5 неклассических оценок и каждая из формул A и B принимает значение $1/2$ на каких-либо трех из них. Зная, что на одной из неклассических оценок формула B принимает значение 0, получаем, что всегда будет место одна из следующих ситуаций:

	A	B	A	B	A	B
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
w_1	1	$1/2$	1	1 или 0	1	1 или 0
w_2	$1/2$	1 или 0	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
w_3	$1/2$	$1/2$	$1/2$	0	$1/2$	$1/2$
w_4	$1/2$	0	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
w_5	1	$1/2$	1	$1/2$	1	0
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Но в любом случае, при условии, что формула B принимает значение 0 на неклассической оценке, получим, что формула $A \to_{41} B$ на какой-либо неклассической оценке примет значение 0.

Подобное рассуждение позволяет нам утверждать, что *modus ponens* в формулировке (ii) имеет место для $M^{41,2}$.

Итак, нами было показано, что при ослаблении условия (2) в определении естественной импликации *modus ponens* в качестве правила, сохраняющего тавтологию, но не сохраняющее выделенное значение, имеет место в следующих 18 матрицах[13]:

[13]Полный перечень таблиц для импликаций приведен в Приложении.

$$
\begin{array}{ll}
M^{2,2} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \to_2, \{1, 1/2\}\rangle, & M^{3,2} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \to_3, \{1, 1/2\}\rangle, \\
M^{5,2} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \to_5, \{1, 1/2\}\rangle, & M^{7,1} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \to_7, \{1\}\rangle, \\
M^{29,2} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \to_{29}, \{1, 1/2\}\rangle, & M^{29,1} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \to_{29}, \{1\}\rangle, \\
M^{30,2} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \to_{30}, \{1, 1/2\}\rangle, & M^{31,2} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \to_{31}, \{1, 1/2\}\rangle, \\
M^{32,2} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \to_{32}, \{1, 1/2\}\rangle, & M^{33,2} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \to_{33}, \{1, 1/2\}\rangle, \\
M^{34,2} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \to_{34}, \{1, 1/2\}\rangle, & M^{35,2} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \to_{35}, \{1, 1/2\}\rangle, \\
M^{36,2} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \to_{36}, \{1, 1/2\}\rangle, & M^{37,2} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \to_{37}, \{1, 1/2\}\rangle, \\
M^{38,2} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \to_{38}, \{1, 1/2\}\rangle, & M^{39,2} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \to_{39}, \{1, 1/2\}\rangle, \\
M^{40,2} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \to_{40}, \{1, 1/2\}\rangle, & M^{41,2} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \to_{41}, \{1, 1/2\}\rangle.
\end{array}
$$

Несложно показать, что только операции в этих матрицах будут удовлетворять определению естественной импликации с ослабленным условием (2), т.е. являются слабо естественными импликациями. Если мы рассмотрим определение естественной импликации без условия (2), то кроме трехзначных матриц, рассмотренных нами ранее, в качестве матриц, в которых можно предположить наличие *modus ponens* в формулировке (ii) имеются следующие две группы матриц:

Группа I: 28 матриц

$M^\gamma = \langle\{0, 1/2, 1\}, \to_\gamma, \{1, 1/2\}\rangle$, где $\to_\gamma$ определяется таблицей (за исключение таблиц, определяющих $\to_5$, $\to_{29}$, $\to_{40}$ и $\to_{41}$):

$\to_\gamma$	b	$1/2$	0
1	1	b	0
$1/2$	a	a	a
0	1	a	1

где $a \in \{1, 1/2\}$ и $b \in \{1, 0\}$.

Группа II: 4 матрицы

$M^\delta = \langle\{0, 1/2, 1\}, \to_\delta, \{1, 1/2\}\rangle$, где $\to_\delta$ определяется таблицей:

$\to_\delta$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	a	a	1
0	1	$1/2$	1

где $a \in \{1, 1/2\}$.

Ни одна из 32 матриц не совпадает по классу тавтологий с импликативным фрагментом классической логики и для каждой возможно привести контрпример, демонстрирующий, что *modus ponens* тавтологию не сохраняет. Так, например, для трех матриц[14] группы II *из* $\models_{M^\delta} p \to_\delta (p \to_\delta p)$ *и* $\models_{M^\delta} (p \to_\delta (p \to_\delta p)) \to_\delta ((p \to_\delta q) \to_\delta p) \to_\delta p)$ *не следует* $\models_{M^\delta} ((p \to_\delta q) \to_\delta p) \to_\delta p$.

Замечание 5. Обратим, внимание на тот факт, что для наличия (ii) принципиально важно, какие связки входят в пропозициональный язык и каковы базовые операции в соответствующей матрице. Так, например, если в матрице $M^{29,2} = \langle \{0, 1/2, 1\}, \to_{29}, \{1, 1/2\} \rangle$ расширить класс базовых операций за счет добавления $\sim$[15], *modus ponens* в формулировке (ii) будет иметь место, если добавить операцию $max(x, y)$ правило *modus ponens* сохранять тавтологию не будет.

Проведенный нами анализ позволяет сделать следующее утверждение

Утверждение 2. Для любой трехзначной логической матрицы, совпадающей по классу тавтологий с классической логикой или ее импликативным фрагментом (т.е. верифицирующей K, S, P и закон обратной контрапозиции; или K, S, P — в случае импликативного фрагмента), верно, что правило *modus ponens* сохраняет тавтологию.

[14] Для матрицы, в которой операция импликации определяется таблицей для $\to_\delta$, где $a = 1$ имеет место другой контрпример.

[15] $\sim 1 = 0, \sim 1/2 = 1/2, \sim 0 = 1$.

Итак, в результате полный класс естественных импликаций (строго естественных и слабо естественных) выглядит следующим образом:

	Естественные импликации	
	строго естественные	слабо естественные
$D = \{1\}$	6	2
$D = \{1, 1/2\}$	24	16

Полный перечень таблиц для естественных импликаций приведен в Приложении.

3.5. Расширенный класс естественных импликаций и базовые логики

В рамках данного раздела нас будут интересовать функциональные свойства трехзначных логик. Поэтому под логикой будем понимать класс функций F, соответствующий этой логике.

Определение 10. Пусть F — множество функций, соответствующее исходным связкам логики $\mathbf{L}$. Замыканием $[F]$ будем называть множество функций, которое содержит все суперпозиции функций, принадлежащих F.

Определение 11. Множество функций F функционально вложимо во множество функций F', если посредством F' определимы функции F.

Определение 12. Множество функций F функционально эквивалентно множеству функций F', если

(1) F функционально вложимо в F' и
(2) F' функционально вложимо в F.

Определение 13. Расширением множества функций F назовем множество функций F', которое представляет собой пополнение исходного множества функций F функцией f, которая не может быть определена посредством функций F.

В работе [5] нами были последовательно рассмотрены расширения регулярных логик Клини посредством естественных импликаций. В результате все импликативные расширения были сведены к 7 *базовым* логикам: $\mathbf{Ł_3}$, **PCont**, $\mathbf{B_3}$, **Z**, $\mathbf{T^3}$, $\mathbf{T^2}$ и $\mathbf{T^1}$. Доказано, что они образуют семиэлементную решетку по отношению функционального вложения.

В результате видоизменения определения естественной импликациии и ослабления условия нормальности класс естественных импликаций увеличился за счет так называемых слабо естественных импликаций. Появилось 13 новых таблиц для импликаций.

Анализу новых импликативных расширений регулярных логик Клини и будет посвящен данный раздел. Для этого достаточно рассмотреть расширения множества функций, соответствующее множеству связок слабой регулярной логики Клини $\mathbf{K_3^w}$.

Исходным связкам логики $\mathbf{K_3^w}$ соответствуют функции $\sim x, x \cup y, x \cap y$, где $\sim x$, $x \cup y$ и $x \cap y$ определяются соответствующими таблицами:

x	$\sim x$
1	0
1/2	1/2
0	1

$\cup$	1	1/2	1
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2
0	1	1/2	0

$\cap$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2
0	0	1/2	0

Итак, обратимся к задаче анализа новых импликативных расширений слабой регулярной логики Клини.

3.5.1. Логика $\mathbf{Ł_3}$ и эквивалентные ей расширения $\mathbf{K_3^w}$

Исходным связкам логики Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$ соответствуют функции $\sim x$, $x \to_3 y$, где где $\sim x$ определяется аналогично K_3^w[16], а $x \to_3 y$ определяется таблицей:

[16]Названия множеств функций, соответствующих конкретным логическим системам, будем обозначать курсивом.

$\to_3$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	1	1	$1/2$
0	1	1	1

Рассмотрим расширения множества функций K_3^w посредством функции импликации $x \to_i y\,(i \in \{29, \ldots, 41\})$ и выделим из них системы, функционально эквивалентные множеству функций $Ł_3$, соответствующему логике Лукасевича .

Утверждение 3. Расширение K_3^w посредством $x \to_i y\,(i \in \{34, 37, 39, 40\}$ есть $Ł_3$, т.е. $[\{\sim x, x \cup y, x \cap y\} \cup \{x \to_i y\}] = Ł_3$.

Доказательство. Учитывая тот факт, что любая трехзначная **C**-расширяющая функция, может быть определена посредством функций $Ł_3$[17], то для доказательства достаточно посредством каждого из множеств функций $\{\sim x, x \cup y, x \cap y, x \to_i y\}$ определить $x \to_3 y$. Последнее вытекает из следующих тождеств:

(1) $x \to_{39} y =_{df} \sim y \to_{37} \sim x$,

(2) $x \to_{37} y =_{df} \sim y \to_{39} \sim x$,

(3) $x \to_{40} y =_{df} (\sim y \to_{34} \sim (\sim x \to_{34} x)) \cup (x \to_{34} \sim x)$,

(4) $x \to_{34} y =_{df} (\sim y \to_{40} \sim x) \cap (\sim x \to_{34} (y \cup \sim y))$,

(5) $x \to_3 y =_{df} ((\sim y \to_{34} x) \cap \sim (y \to_{34} \sim y)) \cup (x \to_{34} \sim x)$,

(6) $x \to_3 y =_{df} ((y \to_{37} x) \to_{39} (x \to_{39} y)) \cap ((y \to_{37} x) \to_{37} (y \to_{39} x))$. □

3.5.2. Логика PCont и эквивалентные ей расширения $\mathbf{K_3^w}$

Исходным связкам логики **PCont** соответствуют функции $\sim x, x \vee y, x \wedge y, x \to_{21} y$, где $\sim x$ определяется аналогично K_3^w, а $x \vee y$, $x \wedge y$ и $x \to_{21} y$ определяются следующим образом:

[17] Следствие теоремы В.К. Финна о функциональной предполноте $Ł_3$ [7].

$\vee$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1/2	0

$\wedge$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	0	0	0

$\to_{21}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1/2	0
0	1	1	1

В [5] показано, что $[\{\sim x, x \vee y, x \wedge y, x \to_{21} y\}] = [\{\sim x, x \cup y, x \cap y, x \to_{21} y\}]$.

Утверждение 4. Расширение K_3^w посредством $x \to_i y\,(i \in \{35, 36\}$ есть *PCont*, т.е. $[\{\sim x, x \cup y, x \cap y\} \cup \{x \to_i y\}] = PCont$.

Доказательство. Покажем, что $[\{\sim x, x \cup y, x \cap y, x \to_{35} y\}] = [\{\sim x, x \cup y, x \cap y, x \to_{36} y\}]$. Это имеет место, т. к.

(1) $x \to_{36} y =_{df} (x \to_{35} y) \cap ((y \to_{35} x) \cup (x \to_{35} y))$,

(2) $x \to_{35} y =_{df} \sim(x \to_{36} y) \to_{36} (\sim y \cap y)$.

В [5] показано, что $[\{\sim x, x \cup y, x \cap y, x \to_{21} y\}] = [\{\sim x, x \cup y, x \cap y, x \to_{19} y\}]$.

Далее покажем, что система функций $\{\sim x, x \cup y, x \cap y, x \to_{19} y\}$ функционально вложима в $\{\sim x, x \cup y, x \cap y, x \to_{35} y\}$. Это справедливо, т.к.

(3) $x \circ y =_{df} x \to_{35} \sim(y \to_{35} \sim x)$,

(4) $x \to_{19} y =_{df} \sim y \circ \sim x$.

Остается доказать, что посредством множества функций *PCont* возможно определить, например, $x \to_{36} y$. Так как $\{x \to_{20} y\} \in [\{\sim x, x \cup y, x \cap y, x \to_{21} y\}]$, выразить $x \to_{36} y$ можно следующим образом:

(5) $x \to_{36} y =_{df} x \to_{21} ((x \to_{20} y) \cup (\sim y \to_{20} \sim x))$. $\square$

3.5.3. Логика $\mathbf{B_3}$ и эквивалентные ей расширения $\mathbf{K_3^w}$

Исходным связкам логики $\mathbf{B_3}$ соответствуют функции $\sim x, \vdash x$, $x \cap y$ где $\sim x$ и $x \cap y$ определяются так же, как в K_3^w, а $\vdash 1 = 1$; $\vdash 1/2 = \vdash 0 = 0$.

Докажем следующее утверждение:

Утверждение 5. Расширение K_3^w посредством $x \to_{29} y$ есть B_3, т.е. $[\{\sim x, x \cup y, x \cap y\} \cup \{x \to_{29} y\}] = B_3$.

Доказательство данного факта можно представить следующим образом. С одной стороны, известно, что множество всех внешних функций[18] включено в класс функций логики Бочвара [6]. И очевидно, что $x \to_{29} y$ принадлежит к классу внешних функций.

С другой стороны, посредством $\{\sim x, x \cap y, x \to_{29} y\}$ достаточно выразить $\vdash x$ Последнее можно сделать так:

$$\vdash x =_{df} x \to_{29} \sim x.$$

□

3.5.4. Логика $\mathbf{T^1}$ и эквивалентные ей расширения $\mathbf{K_3^w}$

Ранее нами было доказано, что расширение K_3^w посредством $x \to_{23} y$ есть T^1(см. [5]), т.е. исходным связкам логики $\mathbf{T^1}$ соответствуют функции $\sim x, x \cup y, x \cap y, x \to_{23} y$, где $\sim x$, $x \cup y$ и $x \cap y$ определяются так же, как в K_3^w, а $x \to_{23} y$ определяется таблицей:

$\to_{23}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1/2	0
0	1	1/2	1

[18] Функция f называется внешней, если для любого набора истинностных значений $v_1 \ldots, v_n$ $f(v_1 \ldots, v_n) = 0$ или $f(v_1 \ldots, v_n) = 1$.

Рассмотрим следующее

Утверждение 6. Расширение K_3^w посредством $x \to_{41} y$ есть T^1, т.е. $[\{\sim x, x \cup y, x \cap y\} \cup \{x \to_{41} y\}] = T^1$.

Доказательство следует из определений:

(1) $x \to_{23} y =_{df} \sim y \to_{41} \sim x$,

(2) $x \to_{41} y =_{df} \sim y \to_{23} \sim x$. □

3.5.5. Логика $\mathbf{T^3}$ и эквивалентные ей расширения $\mathbf{K_3^w}$

Исходным связкам логики $\mathbf{T^3}$ соответствуют функции $\sim x$, $x \cup y$, $x \cap y$, $x \to_{13} y$, где $\sim x$, $x \cup y$ и $x \cap y$ определяются так же, как в K_3^w, а $x \to_{13} y$ определяется таблицей:

$\to_{13}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	0
0	1	1/2	1

Утверждение 7. Расширение K_3^w посредством $x \to_{38} y$ есть T^3, т.е. $[\{\sim x, x \cup y, x \cap y\} \cup \{x \to_{38} y\}] = T^3$.

Доказательство. Достаточно посредством множества функций $\{\sim x, x \cup y, x \cap y, x \to_{13} y\}$ определить $x \to_{38} y$ и посредством $\{\sim x, x \cup y, x \cap y, x \to_{38} y\}$ определить $x \to_{13} y$.

Обратим внимание, что посредством $\{\sim x, x \cup y, x \cap y, x \to_{13} y\}$ определим одноместный оператор $I(x) =_{df} x \cap \sim x$, тогда

$$x \to_{38} y =_{df} (x \to_{13} y) \cup (\sim I(y) \to_{13} I(x)).$$

Посредством $\{\sim x, x \cup y, x \cap y, x \to_{38} y\}$ также определим одноместный оператор $I(x) =_{df} x \cap \sim x$ и $J_0(x) =_{df} \sim(\sim x \to_{38} x)$, тогда

$$x \to_{13} y =_{df} (I(x) \to_{38} I(x \cup y)) \cap (\sim J_0(y) \cup J_0(x)).$$ □

3.5.6. Регулярные логики Клини

В результате ослабления условия нормальности в класс «*слабо*» естественных импликаций попали регулярные импликации. Это импликация $\to_{31}$ — импликация слабой логики Клини $\mathbf{K_3^w}$, импликация $\to_{30}$ — импликация сильной логики Клини $\mathbf{K_3}$, и две импликации $\to_{32}$ и $\to_{33}$ промежуточных регулярных логик **Lisp** ($\mathbf{K_3^{\to}}$) и **TwinLisp** ($\mathbf{K_3^{\leftarrow}}$).

Напомним, что исходным связкам логики $\mathbf{K_3}$ соответствуют функции $\sim x, x \vee y, x \wedge y$, которые определяются таблицами на стр. 119.

Исходным связкам логики $\mathbf{K_3^{\to}}$ соответствует функции $\sim x, x \vee^{\to} y, x \wedge^{\to} y$, где $x \vee^{\to} y$ и $x \wedge^{\to} y$ определяются таблицами:

$\vee^{\to}$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1/2	1/2	1/2
0	1	1/2	0

$\wedge^{\to}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2
0	0	0	0

Исходным связкам логики $\mathbf{K_3^{\leftarrow}}$ соответствуют функции $\sim x, x \vee^{\leftarrow} y, x \wedge^{\leftarrow} y$, где $x \vee^{\leftarrow} y$ и $x \wedge^{\leftarrow} y$ определяются таблицами:

$\vee^{\leftarrow}$	1	1/2	0
1	1	1/2	1
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1/2	0

$\wedge^{\leftarrow}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	0	1/2	0

В [4] доказана функциональная эквивалентность $K_3^{\to}$ и $K_3^{\leftarrow}$.

Поскольку $x \to_{31} y =_{df} \sim x \cup y$, то при расширении множества исходных функций K_3^w посредством $x \to_{31} y$ получим то же множество функций K_3^w.

Поскольку $K_3^w \subset K_3$ и $x \vee y =_{df} \sim x \to_{30} y$, то $[K_3^w \cup \{x \to_{30} y\}] = K_3$.

Аналогичным образом можно показать, что $[K_3^w \cup \{x \to_{32} y\}] = K_3^{\to}$ и $[K_3^w \cup \{x \to_{33} y\}] = K_3^{\leftarrow}$.

В [4, с. 120–122] были определены решеточные свойства регулярных логик Клини: $\mathbf{K_3}$ представляет собой решетку, а также модель алгебры Клини; $\mathbf{K_3^w}$ — квазирешетку; а $\mathbf{K_3^{\to}}$ и $\mathbf{K_3^{\leftarrow}}$ — некоммутативные алгебры Клини.

Таким образом, учитывая вышесказанное, любая регулярная логика есть квазирешетка ($\mathbf{K_3^w}$) или расширение квазирешетки посредством естественной импликации ($\mathbf{K_3}$, $\mathbf{K_3^{\to}}$, $\mathbf{K_3^{\leftarrow}}$).

3.6. Заключение

Итак, нами было рассмотрено видоизмененное определение естественной импликации. Требование нормальности в смысле Лукасевича-Тарского (требование для *modus ponens* сохранения выделенного значения) было заменено на более слабое условие — требование для *modus ponens* сохранения тавтологии. Таким образом, класс естественных импликаций расширился, наряду со строго естественными импликациями были выделены слабо естественные. Далее, были рассмотрены импликативные расширения слабой регулярной логики Клини. В результате наряду с семью *базовыми* логиками в классификацию вошли регулярные логики Клини: слабая, сильная и промежуточная.

$\mathbf{Ł_3}$	**PCont**	$\mathbf{B_3}$	**Z**	$\mathbf{T^1}$	$\mathbf{T^2}$	$\mathbf{T^3}$	$\mathbf{K_3}$	$\mathbf{K_3^{\to}}$	$\mathbf{K_3^w}$
$\to_i$ ($i \in \{1, 2, 3, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 34, 37, 39, 40\}$)	$\to_i$ ($i \in \{18, 19, 20, 21, 22, 26, 27, 28, 35, 36\}$)	$\to_i$ ($i \in \{4, 5, 7, 29\}$)	$\to_{17}$ $\to_{25}$	$\to_{23}$ $\to_{41}$	$\to_{24}$	$\to_{13}$ $\to_{38}$	$\to_{30}$	$\to_{32}$ $\to_{33}$	$\to_{31}$

Среди всего класса естественных импликаций обратим внимание на 7 из них.

	Строго естественные		Слабо естественные	
	$D=\{1\}$	$D=\{1, 1/2\}$	$D=\{1\}$	$D=\{1, 1/2\}$
$\to_1$	+	+	+	+
$\to_2$	+		+	+
$\to_3$	+		+	+
$\to_4$	+	+	+	+
$\to_5$	+		+	+
$\to_7$		+	+	+
$\to_{29}$			+	+

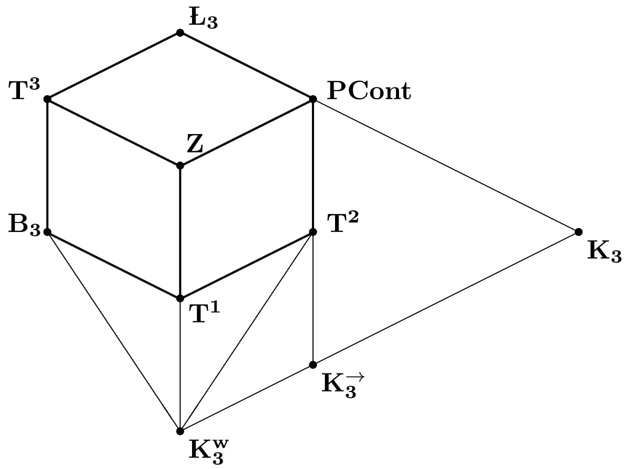
Поскольку ясно, что всякая строго естественная импликация является слабо естественной, видим, что все эти импликации независимо от выбора множества выделенных значений относятся к классу слабо естественных.

Импликации $\to_1$ и $\to_4$ являются строго естественными как при $D=\{1\}$, так и при $D=\{1, 1/2\}$, а импликация $\to_{29}$ может быть только слабо естественной независимо от выбора множества выделенных значений.

Интересно, что, например, импликации $\to_2$, $\to_3$ и $\to_5$ являются строго естественными только при $D=\{1\}$, а слабо естественными могут быть и при $D=\{1, 1/2\}$.

С точки зрения нашей классификации, расширение слабой регулярной логики Клини этими импликациями приводят к двум системам **Ł3** и **B3**.

Итак, решетка всех импликативных расширений слабой регулярной логики Клини выглядит следующим образом:



Таким образом, ослабление условия нормальности в определении естественной импликации, привело к появлению новых таблиц, определяющих операции импликации. При функциональном подходе к классификации трехзначных логик, при рассмотрении импликативных расширений слабой логики Клини, в класс естественных логик попали сами регулярные логики Клини.

Литература

[1] *Девяткин Л.Ю.* Трехзначные семантики для классической логики высказываний. М.: ИФРАН, 2011. 108 с.

[2] *Девяткин Л.Ю., Карпенко А.С., Попов В.М.* Трехзначные характеристические матрицы классической пропозициональной логики // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XVIII. М.: ИФРАН, 2007. С. 50–62.

[3] *Карпенко А.С.* Развитие многозначной логики. Изд. 3-е, перераб. и доп. М.: ЛКИ, 2010. 448 с.

[4] *Комендантская Е.Ю.* Функциональная взаимовыразимость регулярных логик Клини // Логические исследования. 2009. Вып. 15. С. 116–128.

[5] *Томова Н.Е.* Естественные трехзначные логики: Функциональные свойства и отношения. М.: ИФРАН, 2012. 89 с.

[6] *Финн В.К.* О критериях функциональной полноты $\mathfrak{B}_3$ // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М.: Наука, 1974. С. 194–199.

[7] *Финн В.К.* О предполноте класса функций, соответствующего трехзначной логике Я. Лукасевича // Научно-техническая информация. М. 1969. Сер. 2. Вып. 10. С. 35–38.

[8] *Avron A.* Natural three-valued logics — characterization and proof theory // The Journal of Symbolic Logic. 1991. Vol. 56. № 1. P. 276–294.

[9] *Beall Jc., Forster Th., Seligman J.* A note on freedom from detachment in the logic of paradox // Notre Dame Journal of Formal Logic. 2013. Vol. 54. № 1. P. 15–20.

[10] *Humberstone L.* The Connectives. MIT Press, 2011. 1492 p.

[11] *Łukasiewicz J., Tarski A.* Investigations into the sentential calculus // Łukasiewicz J. Selected Works. Amsterdam & Warszawa: North-Holland & PWN, 1970. P. 131–152.

[12] *Malinowski G.* Multiplying logical values // Логические исследования. 2012. Вып. 18. С. 292–308.

[13] *Malinowski G.* On many-valuedness, sentential identity, inference and Łukasiewicz modalities // Logica Trianguli. 1997. Vol. 1. P. 59–72.

[14] *Priest G.* The logic of paradox // Journal of Philosophical Logic. 1979. Vol. 8. № 1. P. 219–241.

[15] *Priest G.* An Introduction to Non-Classical Logic. From If to Is. 2nd Edition. New York: Cambridge University Press, 2008. 643 p.

[16] *Rescher N.* Many-Valued Logic. New York: McGraw Hill, 1969. 349 p.

[17] *Schechter E.* Classical and Nonclassical Logics: An Introduction to the Mathematics of Proposition. Princeton University Press, 2005. 520 p.

[18] *Tomova N.E.* A lattice of implicative extensions of regular Kleene's logics // Reports on mathematical logic. 2012. Vol. 47. P. 173–182.

[19] *Tomova N.E.* Natural three-valued logics and classical logic // Logical investigations. 2013. Special issue. Vol. 19. P. 344–352.

[20] *Wansing H.* Essays on Non-classical Logic. MIT Press, 2011. 1492 p.

Приложение. Трехзначные естественные импликации: таблицы истинности

(I) Строго естественные импликации. Перечень естественных импликаций, для которых правило *modus ponens* сохраняет выделенное значение. (Для импликаций $\to_1$ и $\to_4$ правило *modus ponens* сохраняет выделенное значение как при $D = \{1\}$, так и при $D = \{1, 1/2\}$.)

При $D = \{1\}$

$\to_1$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	0
0	1	1	1

$\to_2$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	1
0	1	1	1

$\to_3$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	1/2
0	1	1	1

$\to_4$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	1	1	0
0	1	1	1

$\to_5$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	1	1	1
0	1	1	1

$\to_6$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	1	1	1/2
0	1	1	1

$D = \{1, 1/2\}$

$\to_7$	1	1/2	0
1	1	1	0
1/2	1	1	0
0	1	1	1

$\to_8$	1	1/2	0
1	1	1	0
1/2	1/2	1	0
0	1	1	1

$\to_9$	1	1/2	0
1	1	1	0
1/2	1/2	1	0
0	1	1/2	1

$\to_{10}$	1	1/2	0
1	1	1	0
1/2	1	1	0
0	1	1/2	1

$\to_{11}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1	0
0	1	1	1

$\to_{12}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1	0
0	1	1/2	1

$\to_{13}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	0
0	1	1/2	1

$\to_{14}$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	1/2	1	0
0	1	1	1

$\to_{15}$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	1	1	0
0	1	1/2	1

$\to_{16}$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	1/2	1	0
0	1	1/2	1

$\to_{17}$	1	1/2	0
1	1	1	0
1/2	1	1/2	0
0	1	1	1

$\to_{18}$	1	1/2	0
1	1	1	0
1/2	1/2	1/2	0
0	1	1	1

$\to_{19}$	1	1/2	0
1	1	1	0
1/2	1	1/2	0
0	1	1/2	1

$\to_{20}$	1	1/2	0
1	1	1	0
1/2	1/2	1/2	0
0	1	1/2	1

$\to_{21}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1/2	0
0	1	1	1

$\to_{22}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	1	1	1

$\to_{23}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1/2	0
0	1	1/2	1

$\to_{24}$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	1	1/2	1

$\to_{25}$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	1	1/2	0
0	1	1	1

$\to_{26}$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	1/2	1/2	0
0	1	1	1

$\to_{27}$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	1	1/2	0
0	1	1/2	1

$\to_{28}$	1	$1/2$	0
1	1	0	0
$1/2$	$1/2$	$1/2$	0
0	1	$1/2$	1

(II) Слабо естественные импликации. Перечень естественных импликаций, для которых правило *modus ponens* сохраняет тавтологию, но не сохраняет выделенное значение. (Для импликации $\to_{29}$ правило *modus ponens* сохраняет тавтологию, но не сохраняет выделенное значение как при $D = \{1\}$, так и при $D = \{1, 1/2\}$.)

При $D = \{1\}$

$\to_7$	1	$1/2$	0
1	1	1	0
$1/2$	1	1	0
0	1	1	1

$\to_{29}$	1	$1/2$	0
1	1	1	0
$1/2$	1	1	1
0	1	1	1

При $D = \{1, 1/2\}$

$\to_2$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	1	1	1
0	1	1	1

$\to_3$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	1	1	$1/2$
0	1	1	1

$\to_5$	1	$1/2$	0
1	1	0	0
$1/2$	1	1	1
0	1	1	1

$\to_{30}$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	1	$1/2$	$1/2$
0	1	1	1

$\to_{31}$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
0	1	$1/2$	1

$\to_{32}$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
0	1	1	1

$\to_{33}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	1	$^1/_2$	$^1/_2$
0	1	$^1/_2$	1

$\to_{34}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	$^1/_2$	1	1
0	1	1	1

$\to_{35}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	1	$^1/_2$	1
0	1	1	1

$\to_{36}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	1
0	1	1	1

$\to_{37}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	$^1/_2$	1	$^1/_2$
0	1	1	1

$\to_{38}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	$^1/_2$	1	$^1/_2$
0	1	$^1/_2$	1

$\to_{39}$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	1	1	$^1/_2$
0	1	$^1/_2$	1

$\to_{40}$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	0
$^1/_2$	1	1	1
0	1	$^1/_2$	1

$\to_{41}$	1	$^1/_2$	0
1	1	0	0
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$
0	1	1	1

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Научное издание

Девяткин Леонид Юрьевич
Преловский Николай Николаевич
Томова Наталья Евгеньевна

В границах трехзначности

Утверждено к печати Ученым советом
Института философии РАН

Художник *Н.Е. Кожинова*

Технический редактор: *Ю.А. Аношина*

Корректура авторов

Лицензия ЛР № 020831 от 12.10.98 г.

Подписано в печать с оригинал-макета 26.11.15.
Формат 64х84 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern.
Усл. печ. л. 8,5. Уч.-изд. л. 6,57. Тираж 500 экз. Заказ № 29.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН
Компьютерный набор авторов
Компьютерная верстка: *Л.Ю. Девяткин*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1

Информацию о наших изданиях см. на сайте Института философии:
http://iph.ras.ru/arhive.htm